

# JOURNÉES ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

SERGE ALINHAC

CLAUDE ZUILY

## **Unicité et non unicité du problème de Cauchy pour des opérateurs hyperboliques à caractéristiques doubles**

*Journées Équations aux dérivées partielles* (1980), p. 1-5

[http://www.numdam.org/item?id=JEDP\\_1980\\_\\_\\_\\_A1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=JEDP_1980____A1_0)

© Journées Équations aux dérivées partielles, 1980, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Journées Équations aux dérivées partielles » (<http://www.math.sciences.univ-nantes.fr/edpa/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

UNICITE ET NON UNICITE DU PROBLEME DE CAUCHY POUR DES  
OPERATEURS HYPERBOLIQUES A CARACTERISTIQUES DOUBLES

par S. ALINHAC et C. ZUILY

Cette note présente des conditions suffisantes d'unicité et de non unicité du problème de Cauchy, relatif à la surface  $\{t = 0\}$  dans  $\mathbb{R}^{n+1}_{(x,t)}$ , pour des opérateurs différentiels de la forme :

$$P(x,t ; D_x, D_t) = D_t^2 + p(x,t ; D_x, D_t) + c$$

où  $p$  est un opérateur du premier ordre à coefficients  $C^\infty$  et  $c$  une fonction  $C^\infty$ . (voir Matsumoto [4], Zuily [6] pour certains résultats partiels).

Les résultats d'unicité sont obtenus à l'aide de la technique des inégalités de Carleman et ceux de non unicité par une méthode qui est à rapprocher des travaux de Cohen [2], Pliř [5], Hörmander [3], Alinhac-Baouendi [1], où la méthode de l'optique géométrique joue un rôle crucial.

Il apparaît que dès que  $n$  est plus grand que 1, l'unicité pour  $P$ , pour toute perturbation d'ordre zéro,  $C^\infty$ , est un phénomène exceptionnel.

RESULTATS

Dans ce qui suit nous noterons  $(x,t)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , la variable de  $\mathbb{R}^{n+1}$ ,  $V$  un voisinage du point  $(0,0)$  et  $V^+ = \{(x,t) \in V : t > 0\}$ .

Nous désignerons par  $E$  l'ensemble des opérateurs tangentiels, homogènes d'ordre 1,  $p(x,t; D_x) = \sum_{j=1}^n a_j(x,t) D_j$ , dont les coefficients sont réels et de classe  $C^\infty$  dans  $V$ .

Théorème 1 : Soient  $p_1, p_2$  deux éléments de  $E$  et  $P_0 = D_t^2 + p_1 + ip_2$ . Supposons qu'il existe des fonctions  $a, b, c, d, f, g$  bornées dans  $V^+$  avec  $t \frac{\partial b}{\partial t}$  bornée telles que :

$$(H.1) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t}, p_2 \right] = \frac{a}{t} p_2$$

$$(H.2) \quad \left[ \frac{\partial}{\partial t}, p_1 \right] = \frac{b}{t} p_1 + \frac{c}{t} p_2$$

Il existe  $\varepsilon > 0$  tel que dans  $V^+$

$$(H.3) \quad \begin{cases} b + 2 \geq \varepsilon \\ 2(a+1) - b \geq \varepsilon \\ (b+2)(2a+2-b) - c^2 \geq \varepsilon \end{cases}$$

$$(H.4) \quad [p_1, p_2] = fp_1 + gp_2$$

Alors, si  $u$  est un élément de  $C^\infty(V)$  qui, pour un  $C = C(u)$ , vérifie

$$\begin{cases} |P_0 u(x,t)| \leq C \left\{ \frac{1}{t} \left| \frac{\partial u}{\partial t}(x,t) \right| + \frac{1}{t^2} |u(x,t)| \right\} & (x,t) \in V \\ u|_{t < 0} = 0 \end{cases}$$

il existe un voisinage  $W$  de  $(0,0)$  dans lequel  $u$  est nulle.

Exemples :

$$1. \quad P_0 = D_t^2 + t^\ell \alpha(x,t) D_1, \quad \alpha \in C^\infty(V), \quad \text{Im } \alpha \neq 0, \quad \ell \in \mathbb{N}$$

$$2. \quad P_0 = D_t^2 + z(t+x^2) D_1, \quad z = 1 \text{ ou } i$$

$$3. \quad P_0 = D_t^2 + t^\ell D_1 + it^m D_2, \quad 2(m+1) > \ell.$$

Théorème 2 : Soit  $P = D_t^2 + p_1 + ip_2 + \alpha D_t + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in C^\infty(V)$ . On suppose qu'il existe  $q \in E$  et  $c \in C^\infty(V)$ ,  $c \neq 0$  tels que  $p_1 + ip_2 = cq$ . De plus :

(i) Il existe  $m, n \in \mathbb{N}$ ,  $q_1, q_2 \in E$  non nuls en  $(0,0)$  tels que dans  $V^+$

$$q = t^m q_1, \quad [\partial_t, q] = t^n q_2$$

(ii) Il existe  $\tilde{p}, \tilde{q}$  dans  $E$  indépendants en  $(0,0)$ , des fonctions  $f_1, f_2, g_1, g_2$  réelles et  $C^\infty$  telles que

$$q_1 = f_1 \tilde{p} + f_2 \tilde{q}$$

$$q_2 = g_1 \tilde{p} + g_2 \tilde{q}$$

avec  $\Delta = f_1 g_2 - f_2 g_1 = t^h \Delta_1$ ,  $h \in \mathbb{N}$ ,  $\Delta_1(0,0) \neq 0$ .

Il existe alors des fonctions  $a$  et  $u$  de classe  $C^\infty$  dans  $V$  nulles pour  $t < 0$  telles que

$$\begin{cases} Pu - au = 0 \\ (0,0) \in \text{supp } u \end{cases}$$

Remarques :

a) Si  $q(0,0;\xi)$  et  $q'_t(0,0;\xi)$  sont deux formes linéaires indépendantes les hypothèses (i) et (ii) du théorème 2 sont satisfaites. L'exemple le plus simple étant

$$q = \partial_1 + t\partial_2, \quad q'_t = \partial_2.$$

b) Le théorème 2 concerne donc essentiellement le cas où  $p_1$  et  $p_2$  sont "dépendantes" tandis que  $p_2$  et  $p'_2$  sont "indépendantes".

Théorème 3 : Soit  $P = D_t^2 + p_1 + ip_2 + \alpha D_t + \beta$ ,  $\alpha, \beta \in C^\infty(V)$ ,  $p_1, p_2 \in E$ . On suppose que :

(i) Il existe des entiers  $m, n$ , des éléments  $q_1, q_2 \in E$  non nuls en  $(0,0)$  tels que

$$p_1 = t^m q_1, \quad p_2 = t^n q_2$$

ii) Il existe des éléments  $\tilde{p}, \tilde{q}, v$  de  $E$ , des entiers  $k_1, k_2, \ell$ , des fonctions réelles  $e_j, f_j, g_j$   $j = 1, 2$ , de classe  $C^\infty$  dans  $V^+$  telles que

a)  $\tilde{p}(0,0;\xi), \tilde{q}(0,0;\xi)$  sont indépendantes.

b)  $v \equiv 0$  ou bien  $v(x,t;\xi) = t^\ell \tilde{v}(x,t;\xi)$  et  $\tilde{v}(0,0;\xi)$  n'est pas dans le plan engendré par  $\tilde{p}(0,0;\xi)$  et  $\tilde{q}(0,0;\xi)$

$$c) \begin{cases} q_1 = e_1 \tilde{p} + e_2 \tilde{q} \\ q_2 = f_1 \tilde{p} + f_2 \tilde{q} \\ [\frac{\partial}{\partial t}, p_2] = g_1 \tilde{p} + g_2 \tilde{q} + v \end{cases}$$

d) On note  $\Delta_1 = e_1 f_2 - e_2 f_1$ ,  $\Delta_2 = f_1 g_2 - f_2 g_1$ . Alors

$$* \quad \Delta_1(x,t) = t^{k_1} \tilde{\Delta}_1, \quad \tilde{\Delta}_1(0,0) \neq 0$$

$$* \quad \begin{cases} \text{Si } v \equiv 0 & , \quad \Delta_2 = t^{k_2} \tilde{\Delta}_2, \quad \tilde{\Delta}_2(0,0) \neq 0 \\ \text{Si } v \equiv 0 & , \quad \text{soit } \ell = 0, \text{ soit } \ell \neq 0 \text{ et alors } \Delta_2 \equiv 0 \text{ ou} \\ \Delta_2 = t^{k_2} \tilde{\Delta}_2, \quad \tilde{\Delta}_2(0,0) \neq 0. \end{cases}$$

Il existe alors deux fonctions  $a$  et  $u$  de classe  $C^\infty$  dans  $V$ , nulles pour  $t < 0$  telles que :

$$\begin{cases} Pu - au = 0 \\ (0,0) \in \text{Supp } u \end{cases}$$

Remarques :

1. Par exemple si  $p_1(0,0;\xi)$  et  $p_2(0,0;\xi)$  sont indépendants de même que  $p_2(0,0;\xi)$ ,

$p_2'(0,0;\xi)$  les hypothèses (i) et (ii) sont satisfaites (on peut prendre  $p_1 = D_1$ ,  $p_2 = D_2 + tD_3$ ). Mais pour traiter le cas où  $p_1 = D_1$ ,  $p_2 = D_1 + tD_2$ , il faut utiliser le théorème 3.

2. Ce résultat concerne donc essentiellement le cas où  $p_2$  et  $p_2'$  sont "indépendantes" et  $p_1$  et  $p_2$  sont "indépendantes".

Théorème 4 : Soit  $P = D_t^2 + p_1 + ip_2 + \alpha D_t + \beta$ . On suppose que

(i) Il existe des éléments  $q_1, \dots, q_r$  de  $E$ , ( $r \leq n - 1$ ) indépendants en  $(0,0)$  et en involution, tels que pour tout  $t \geq 0$  et  $x$  voisin de  $0$ ,  $p_1(x,t;\xi)$  et  $p_2(x,t;\xi)$  appartiennent à l'espace  $\Lambda(t,x)$  engendré par les  $q_i(x,t;\xi)$ ,  $1 \leq i \leq r$ .

(ii) a) Il existe, pour  $t > 0$ , une fonction  $b$  telle que  $[\partial_t, p_2] = bp_2$ .

b) Il existe  $v \in E$ , n'appartenant pas à  $\Lambda$  au point  $(0,0)$  et un entier  $m \in \mathbb{N}$  tels que  $[\partial_t, p_1] = t^m v + w$ ,  $w \in \Lambda$ .

c) Il existe  $\tilde{p}, \tilde{q} \in E$ , indépendants en  $(t,x) = (0,0)$  et des fonctions  $f_1, f_2, g_1, g_2$  réelles et  $C^\infty(V)$  telles que pour  $(x,t) \in V^+$

$$\begin{cases} p_1 = f_1 \tilde{p} + f_2 \tilde{q} \\ p_2 = g_1 \tilde{p} + g_2 \tilde{q} \end{cases} \quad \Delta = f_1 g_2 - f_2 g_1 = t^h \Delta_1, \quad \Delta_1 \neq 0, \quad h \in \mathbb{N}.$$

Il existe alors des fonctions  $a$  et  $u$  de classe  $C^\infty$  dans  $V$ , nulles pour  $t < 0$  telles que

$$\begin{cases} Pu - au = 0 \\ (0,0) \in \text{supp } u \end{cases}$$

Le dernier résultat met en évidence sur des modèles, l'importance des valeurs numériques des coefficients (Cf. hypothèse (H.3) du théorème 1).

Théorème 5 : Soit  $P$  l'un des opérateurs suivants :

a)  $P = D_t^2 + t^b D_1 + it^a D_2$ ,  $a, b \in \mathbb{N}$ ,  $2(a+1) < b$

b)  $P = D_t^2 + t^\ell (D_1 + dt^m D_2) + it^{\ell+m} D_2$ ,  $\ell, m \in \mathbb{N}$ ,  $d \in \mathbb{R}$  et  $m^2 d^2 > (\ell+2)(2m+\ell+2)$

Il existe des fonctions  $a, u$  de classe  $C^\infty$  dans  $V$ , nulles pour  $t < 0$  telles que  $Pu - au = 0$  et  $(0,0) \in \text{supp } u$ .

BIBLIOGRAPHIE

- [1] S. Alinhac, M. S. Baouendi : Construction de solutions nulles et singulières pour des opérateurs de type principal. Séminaire Goulaouic-Schwartz 1978-79, exposé XXII, Ecole Polytechnique, Paris.
- [2] P. Cohen : The non uniqueness of the Cauchy problem. ONR. Techn. Report 93 Stanford, 1960.
- [3] L. Hörmander : Non uniqueness for the Cauchy problem. Lecture notes in Math. Springer Verlag n°459 (1975) 36-72.
- [4] W. Matsumoto : Uniqueness for the Cauchy problem... Journ. Math. Kyoto Univ. 15-3 (1975) p.479-525.
- [5] A. Pliš : A smooth linear elliptic differential equation... Comm. Pure Appl. Math. 14 (1961) p.599.
- [6] C. Zuily : Unicité du problème de Cauchy... Journées d'équations aux dérivées partielles, St Cast (1979)

\*  
\* \*  
\*