JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

POINSOT

Remarque sur un point fondamental de la mécanique analytique de Lagrange

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 241-253.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__241_0>

REMARQUE

SUR UN POINT FONDAMENTAL

DE LA *MÉCANIQUE ANALYTIQUE* DE LAGRANGE;

PAR M. POINSOT.

1. On sait que Lagrange, dans ce livre célèbre qu'il a intitulé *Mécanique analytique*, a eu pour objet de réduire la mécanique à des formules générales, toutes tirées du seul *principe des vitesses virtuelles*, ou plutôt de la formule différentielle qui est l'expression de ce principe. Pour la perfection même de son ouvrage, l'auteur a soin de n'employer, dans aucune des questions qu'il traite, ni figures, ni aucun raisonnement tiré de considérations géométriques ou mécaniques; tout se fait par le calcul et de simples changements de coordonnées : et ce n'est même que sous une forme purement analytique qu'on y voit présentée la question si naturelle et si simple de la composition des forces appliquées sur un point.

« Si des forces quelconques P, Q, R,..., dirigées suivant les lignes » p, q, r,..., agissent sur un même point, et qu'on veuille réduire » toutes ces forces à trois autres Ξ, Π, Σ, dirigées suivant les lignes » ξ, π, σ, il n'y aura, dit l'auteur, qu'à considérer l'équilibre des » forces P, Q, R,... et Ξ, Π, Σ, appliquées à ce même point, et di- » rigées respectivement suivant les lignes p, q, r,..., $-\xi$, $-\pi$, $-\sigma$, » et former, en conséquence, l'équation

$$Pdp + Qdq + Rdr + \ldots - \Xi d\xi - \Pi d\pi - \Sigma d\sigma = 0,$$

» laquelle doit être vraie de quelque manière qu'on fasse varier la

» position du point de concours de toutes les forces. Or, quelles que
» soient les lignes ξ, π, σ, il est clair que, pourvu qu'elles ne soient
» pas toutes dans un même plan, elles suffisent pour déterminer la
» position de ce point; par conséquent, on pourra toujours exprimer
» les lignes p, q, r,... par des fonctions de ξ, π, σ, et l'équation pré-
» cédente devra avoir lieu par rapport aux variations de ces trois
» quantités en particulier; d'où il s'ensuit qu'on aura

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\xi} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\xi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\xi} + \ldots,$$

$$\Pi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\pi} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\pi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = \mathrm{P}\frac{dp}{d\sigma} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\sigma} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\sigma} + \ldots. \text{ »}$$

(*Voyez* la *Mécanique analytique*, 1re édition, page 62, ou 2e édition, page 111.)

Telles sont les formules données par Lagrange pour réduire des forces P, Q, R,..., appliquées sur un même point et dirigées suivant des lignes p, q, r,..., à trois autres forces Ξ, Π, Σ, dirigées suivant trois lignes quelconques données ξ, π, σ; expressions d'ailleurs toutes semblables à celles qu'on aurait pour transformer un système quelconque de forces qui agissent sur différents points liés entre eux, comme on voudra, en un autre système équivalent de forces Ξ, Π, Σ,..., qui seraient appliquées aux mêmes points suivant d'autres directions ξ, π, σ,.... (*Voyez* 2e édition, 1re partie, section II, page 43.)

2. Mais il y a, sur ce point de doctrine, une remarque essentielle à faire, et qui paraît avoir échappé à l'auteur de la *Mécanique analytique*. C'est que les formules dont il s'agit ne conviennent point, comme on pourrait le croire, à toute espèce de lignes ou coordonnées ξ, π, σ,..., bien que ces lignes soient propres à déterminer les lieux des corps. Les formules ne sont bonnes qu'autant que ces lignes nouvelles seront (comme les premières p, q, r,...) les distances de ces corps, soit à des *centres fixes*, soit à des *plans fixes*, comme il arrive dans le cas des coordonnées ordinaires x, y, z, lesquelles marquent les distances du point que l'on considère à trois plans fixes *rectangulaires entre eux*:

et, en général, on peut dire que, pour l'exactitude de ces formules, il faut que les lignes ξ, π, σ,... soient de telle nature, que leurs différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,... expriment les *vitesses virtuelles mêmes* du point d'application des forces Ξ, Π, Σ,... : c'est-à-dire que chacune d'elles, $d\xi$, soit la projection *orthogonale,* sur la direction de la force Ξ, du déplacement quelconque infiniment petit qu'on suppose donné à ce point dans l'espace: sans quoi toutes ces transformations analytiques, quoique exactes en pure analyse, seront en défaut dans la mécanique, et conduiront à de fausses conséquences.

3. Supposons, par exemple, qu'il s'agisse d'un seul point tiré par des forces quelconques P, Q, R,..., dirigées suivant les lignes ou rayons vecteurs p, q, r,..., et qu'on veuille réduire ces forces à trois autres Ξ, Π, Σ, suivant les trois coordonnées ξ, π, σ, parallèles à trois axes fixes *obliques* entre eux: il semble, d'après l'auteur, qu'on aurait pour les forces cherchées

$$\Xi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\xi} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\xi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\xi} + \ldots,$$

$$\Pi = \mathrm{P}\frac{dp}{d\pi} + \mathrm{Q}\frac{db}{d\pi} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\pi} + \ldots,$$

$$\Sigma = \mathrm{P}\frac{dp}{d\sigma} + \mathrm{Q}\frac{dq}{d\sigma} + \mathrm{R}\frac{dr}{d\sigma} + \ldots,$$

ce qui n'est pas vrai, car on peut prouver que la résultante des forces P, Q, R,... n'est pas la même que celle des trois forces Ξ, Π, Σ, déterminées par ces équations.

Soit, en effet, $f(p, q, r,\ldots)$ une fonction quelconque des rayons vecteurs p, q, r,...; et désignons par $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$,... les *fonctions primes* de cette fonction prises relativement aux lignes p, q, r,.... J'ai démontré que des forces P, Q, R,..., proportionnelles à ces *fonctions primes* et dirigées suivant les lignes respectives p, q, r,..., ont une résultante perpendiculaire à la surface courbe qui serait donnée par l'équation

$$f(p, q, r,\ldots) = \text{constante},$$

en y regardant p, q, r,... comme variables.

Or supposons maintenant trois axes obliques, non situés dans le même plan, et soient ξ, π, σ les trois coordonnées du point d'application des forces par rapport à ces axes : on pourra toujours exprimer les lignes $p, q, r, \ldots$ par les trois coordonnées ξ, π, σ ; et si l'on met ces expressions au lieu de $p, q, r, \ldots$ dans la fonction $f(p, q, r, \ldots)$, on aura

$$f(p, q, r, \ldots) = \varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

d'où l'on tire, en différentiant successivement par rapport à ξ, π, σ,

$$f'(p)\frac{dp}{d\xi} + f'(q)\frac{dq}{d\xi} + f'(r)\frac{dr}{d\xi} + \ldots = \varphi'(\xi),$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\pi} + f'(q)\frac{dq}{d\pi} + f'(r)\frac{dr}{d\pi} + \ldots = \varphi'(\pi),$$

$$f'(p)\frac{dp}{d\sigma} + f'(q)\frac{dq}{d\sigma} + f'(r)\frac{dr}{d\sigma} + \ldots = \varphi'(\sigma).$$

Donc, suivant les formules de l'auteur, les trois forces Ξ, Π, Σ, auxquelles les forces $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r), \ldots$ se trouveraient réduites, seraient exprimées par

$$\Xi = \varphi'(\xi), \quad \Pi = \varphi'(\pi), \quad \Sigma = \varphi'(\sigma).$$

Ainsi il faudrait que $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ représentassent trois forces dont la résultante fût la même que celle des proposées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r), \ldots$, et par conséquent fût perpendiculaire à la surface donnée par l'équation

$$f(p, q, r, \ldots) = \text{constante}.$$

Or cette surface est la même que celle qui serait donnée par l'équation

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

entre les coordonnées obliques ξ, π, σ. Donc, en considérant la surface représentée par l'équation

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

entre les trois coordonnées ξ, π, σ, relatives à trois axes obliques, on pourrait dire que trois forces dirigées suivant ces coordonnées et proportionnelles aux trois fonctions *primes* $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ donnent une résultante perpendiculaire à la surface dont il s'agit, ou se font équilibre sur cette surface : ce qui est faux, comme on peut s'en assurer immédiatement par le principe même des vitesses virtuelles.

Et, en effet, pour l'équilibre du point auquel les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$ sont appliquées, il faudrait que la somme des *moments virtuels* de ces forces fût nulle pour tout déplacement infiniment petit ds qu'on voudrait donner à ce point sur la surface. Si donc on désigne par $\partial\xi$, $\partial\pi$, $\partial\sigma$ les trois projections orthogonales de ds sur les trois axes obliques de ξ, π, σ, il faudrait, pour l'équilibre, qu'on eût toujours l'équation

$$\varphi'(\xi)\,\partial\xi + \varphi'(\pi)\,\partial\pi + \varphi'(\sigma)\,\partial\sigma = 0;$$

ou bien, comme ds est la diagonale d'un rhomboïde dont les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ sont les arêtes, et que les trois projections de ds sur les directions de ces arêtes sont exprimées par

$$\begin{aligned}\partial\xi &= d\xi + \lambda d\pi + \mu d\sigma,\\ \partial\pi &= d\pi + \nu d\sigma + \lambda d\xi,\\ \partial\sigma &= d\sigma + \mu d\xi + \nu d\pi,\end{aligned}$$

(λ, μ, ν étant les cosinus des angles $\widehat{\xi\pi}$, $\widehat{\xi\sigma}$, $\widehat{\pi\sigma}$ que les axes forment entre eux), il faudrait que, en mettant, au lieu de $\partial\xi$, $\partial\pi$, $\partial\sigma$, ces valeurs, on eût toujours, entre les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$, l'équation

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}&[\varphi'(\xi) + \lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)]\,d\xi + [\varphi'(\pi) + \nu\varphi'(\sigma) + \lambda\varphi'(\xi)]\,d\pi\\ &\qquad + [\varphi'(\sigma) + \mu\varphi'(\xi) + \nu\varphi'(\pi)]\,d\sigma = 0.\end{aligned}\right.$$

D'un autre côté, le point mobile restant toujours sur la surface, il faudrait qu'on eût en même temps l'équation

$$(2)\qquad \varphi'(\xi)\,d\xi + \varphi'(\pi)\,d\pi + \varphi'(\sigma)\,d\sigma = 0.$$

Or il est clair que ces équations (1) et (2) ne peuvent subsister ensemble à moins que les coefficients de $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ dans l'une d'elles ne soient proportionnels aux coefficients des mêmes indéterminées dans l'autre, et par conséquent, à moins qu'on n'ait les deux équations

$$\begin{aligned}\varphi'(\xi)[\nu\varphi'(\sigma) + \lambda\varphi'(\xi)] - \varphi'(\pi)[\lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)] &= 0,\\ \varphi'(\xi)[\nu\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\xi)] - \varphi'(\sigma)[\lambda\varphi'(\pi) + \mu\varphi'(\sigma)] &= 0,\end{aligned}$$

équations qui ne peuvent avoir lieu en général, c'est-à-dire indépendamment des variables ξ, π, σ, et, par conséquent, de la position du point sur la surface que l'on considère.

Ainsi le point mobile, aux coordonnées quelconques ξ, π, σ, ne peut être tenu en équilibre sur la surface par les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$: la résultante de ces forces n'est donc pas normale à cette surface, et, par conséquent, elle n'est pas la même que celle des forces proposées $f'(p)$, $f'(q)$, $f'(r)$, etc. : *ce qu'il fallait démontrer.*

4. Les formules de Lagrange pour la réduction des forces sont donc en défaut dans cette hypothèse de coordonnées obliques ξ, π, σ; il n'y a qu'un cas singulier où l'erreur pourrait s'évanouir : c'est le cas où les coordonnées ξ, π, σ satisferaient aux deux équations précédentes, en même temps qu'à l'équation de la surface

$$\varphi(\xi, \pi, \sigma) = \text{constante},$$

ce qui ne répond, comme on voit, qu'à un certain point de cette surface, ou à une certaine proportion déterminée entre les trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$. Mais, dans ce cas singulier même, si la résultante des trois forces Ξ, Π, Σ a la même direction que la résultante des forces proposées $f'(p)$, $f'(q)$, etc., on trouverait qu'elle n'a pas la même grandeur : de sorte qu'il y aurait encore erreur de ce côté.

Lorsque les cosinus λ, μ, ν sont tous trois *nuls*, les deux conditions précédentes ont toujours lieu d'elles-mêmes, et les formules de Lagrange sont toujours exactes. C'est le cas des coordonnées ξ, π, σ, relatives à trois axes *rectangulaires* entre eux. Et, en effet, pour de telles coordonnées, les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$ sont les expressions mêmes des vitesses virtuelles du point décrivant estimées suivant ces lignes, et l'équation différentielle

$$\varphi'(\xi)\,d\xi + \varphi'(\pi)\,d\pi + \varphi'(\sigma)\,d\sigma = 0,$$

tirée de l'équation de la surface, exprime l'égalité à zéro de la somme des moments virtuels des trois forces $\varphi'(\xi)$, $\varphi'(\pi)$, $\varphi'(\sigma)$, et, par conséquent, l'équilibre de ces forces sur le point qu'on suppose assujetti à décrire cette surface.

Mais, dans toute autre hypothèse que celle de λ, μ, ν tous les trois nuls, les deux conditions ne peuvent être remplies indépendamment de ξ, π, σ; et les formules sont toujours fautives.

5. Soit, par exemple, le cas très-simple d'un point posé sur la circonférence d'un cercle fixe. Si l'on prend l'équation de ce cercle en coordonnées rectangles x et y, on aura

$$f(x, y) = x^2 + y^2 = \text{constante},$$

d'où

$$f'(x)dx + f'(y)dy = 2x.dx + 2y.dy = 0,$$

et l'on pourra très-bien dire ici que deux forces X et Y étant prises le long des coordonnées, dans le rapport des fonctions *primes* $f'(x)$, $f'(y)$, donnent leur résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle, et tiennent ainsi le point d'application en équilibre sur cette circonférence.

Mais si, au lieu de ces coordonnées rectangles x et y, on en prend deux autres ξ et π de même origine, et par exemple l'une, ξ, suivant les x, l'autre, π, inclinée d'un angle α sur la première, ce qui donnera

$$x = \xi + \pi \cos\alpha, \quad y = \pi \sin\alpha,$$

on aura, en substituant,

$$f(x, y) = \varphi(\xi, \pi) = \pi^2 + \xi^2 + 2\pi\xi \cos\alpha = \text{constante};$$

d'où

$$\varphi'(\xi)d\xi + \varphi'(\pi)d\pi = 2(\xi + \pi\cos\alpha)d\xi + 2(\pi + \xi\cos\alpha)d\pi = 0.$$

Or il est évident que deux forces proportionnelles à $\varphi'(\xi)$ et $\varphi'(\pi)$, c'est-à-dire, ici, à $(\xi + \pi\cos\alpha)$ et $(\pi + \xi\cos\alpha)$, ne donnent point leur résultante perpendiculaire à la circonférence du cercle dont il s'agit; car il faudrait pour cela que cette résultante allât passer par le centre, et que, par conséquent, ses deux composantes, le long de ξ et π, fussent simplement proportionnelles à ξ et π, et non pas à $(\xi + \pi\cos\alpha)$ et $(\pi + \xi\cos\alpha)$.

Donc, quoiqu'on ait ici [en faisant $\varphi'(\xi) = \Xi$, $\varphi'(\pi) = \Pi$] les équations

$$\Xi = X\frac{dx}{d\xi} + Y\frac{dy}{d\xi}, \quad \Pi = X\frac{dx}{d\pi} + Y\frac{dy}{d\pi},$$

on ne peut pas dire que les deux forces X et Y, dirigées suivant les axes rectangles x et y, soient réductibles aux deux forces Ξ et Π, dirigées suivant les axes obliques ξ et π.

Pour que l'on eût

$$\xi + \pi \cos\alpha : \pi + \xi \cos\alpha :: \xi : \pi,$$

il faudrait que l'on eût

$$\cos\alpha = 0;$$

ce qui est le cas des coordonnées ξ et π rectangulaires entre elles.

Ou bien, il faudrait $\xi = \pi$; ce qui ne serait qu'un cas particulier de la position du point proposé M sur la circonférence du cercle dont l'équation est

$$\varphi(\xi, \pi) = \text{constante}.$$

Mais, dans ce cas singulier même, où la résultante des deux forces Ξ et Π aurait la même direction que celle des deux forces X et Y, on trouverait que ces deux résultantes,

$$\sqrt{\Xi^2 + 2\Xi\Pi\cos\alpha + \Pi^2}, \quad \text{et} \quad \sqrt{X^2 + Y^2},$$

n'ont pas la même valeur; et que la première est à la seconde comme $1 + \cos\alpha$ est à l'unité.

Ainsi, tant que $\cos\alpha$ n'est pas nul, ou, ce qui est la même chose, tant que les coordonnées ξ et π seront obliques, les forces proposées X et Y ne seront jamais réductibles aux deux forces Ξ et Π données par les formules de Lagrange.

6. Dans l'analyse qui précède, j'ai pris simplement, pour représenter les forces P, Q, R,... qu'il s'agissait de réduire à d'autres, les fonctions *primes* d'une même fonction quelconque $f(p, q, r,\ldots)$ des rayons vecteurs $p, q, r,\ldots$ suivant lesquels ces forces sont dirigées : ce n'est qu'une manière de reconnaître tout d'un coup la direction de la résultante par la direction de la *normale* à la surface courbe qu'on aurait en posant l'équation

$$f(p, q, r,\ldots) = \text{constante}.$$

Mais, comme on pourrait croire que cette hypothèse a quelque chose qui restreint notre démonstration au cas de certaines forces, il est bon de remarquer qu'elle convient à des forces P, Q, R,... données comme on voudra. Et, en effet, quelle que soit la fonction f que l'on ait choisie, comme on est le maître de placer les centres des forces partout où l'on veut sur leurs directions p, q, r,..., on peut toujours donner à ces lignes des longueurs qui rendent

$$f'(p) = \mathrm{P}, \quad f'(q) = \mathrm{Q}, \quad f'(r) = \mathrm{R}, \ldots.$$

Au reste, il est évident que si l'on propose des forces de grandeurs quelconques A, B, C,..., on peut toujours les regarder comme étant les fonctions *primes* de la fonction linéaire

$$\mathrm{A}p + \mathrm{B}q + \mathrm{C}r + \ldots,$$

prises relativement aux lignes p, q, r,... suivant lesquelles ces forces sont supposées dirigées. Ainsi notre hypothèse est toujours permise et notre démonstration a toute la généralité désirable.

7. On voit donc que, dans la mécanique analytique, qui est uniquement fondée sur le principe des vitesses virtuelles, les seules coordonnées qu'il soit permis d'employer doivent être de telle nature, que leurs différentielles représentent, sur ces coordonnées, les projections *droites* de la petite ligne que le point d'application des forces est supposé avoir décrite dans l'espace. C'est ce qui a lieu pour les coordonnées p, q, r,..., x, y, z, dont nous avons parlé, et encore pour celles qui consistent dans un rayon vecteur ρ, avec deux angles ou arcs de cercle φ, ψ, perpendiculaires à ce rayon; etc. Mais il faut exclure toutes les coordonnées ξ, π, σ, qui ne jouiraient pas de la même propriété. Ainsi, il n'est pas exact de dire que, dans cette méthode analytique, *rien n'oblige à se servir de coordonnées rectangles, plutôt que d'autres lignes ou quantités relatives aux lieux des corps*, etc. (*Mécanique analytique*, 1re édition, page 23, ou 2e édition, page 38); et l'on doit même remarquer, à ce sujet, que le principe des vitesses virtuelles ne donne pas une méthode aussi générale qu'on paraît le croire.

Et, par exemple, dans le cas de plusieurs forces P, Q, R, S, etc., en équilibre sur un point, le principe des vitesses virtuelles dit simplement que les forces étant projetées *perpendiculairement* sur une droite quelconque menée par ce point, doivent faire une somme nulle. Car, en nommant du la ligne quelconque qui marque le déplacement du point d'application dans l'espace, les lignes dp, dq, dr, etc., ne sont autre chose que les projections droites de du sur les lignes p, q, r, etc., qui marquent les directions des forces P, Q, R, etc. En nommant donc i, i', i'', etc., les inclinaisons de ces forces sur la ligne du, on a

$$dp = du.\cos i,\quad dq = du\cos i',\quad dr = du\cos i'',\ldots,$$

et l'équation des vitesses virtuelles

$$\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots = 0$$

devient, en divisant tout par le facteur commun du,

$$\mathrm{P}\cos i + \mathrm{Q}\cos i' + \mathrm{R}\cos i'' + \ldots = 0;$$

ce qui signifie que les forces projetées à angle droit sur un axe quelconque doivent faire une somme nulle dans le cas de l'équilibre. Mais le principe de la composition des forces dit plus généralement, que les forces étant projetées sur un axe quelconque par des lignes parallèles à un même plan incliné comme on voudra sur cet axe, la somme de toutes ces projections obliques doit être nulle. Ce n'est pas qu'on ne puisse aisément démontrer cette seconde proposition par la première, mais l'expression du second principe est évidemment plus générale que celle du principe des *vitesses virtuelles*.

De même, on peut remarquer que les équations de l'équilibre d'un système solide ne sont démontrées, dans la *Mécanique analytique*, que par rapport à trois axes *rectangulaires* entre eux; et pourtant, comme je l'ai fait voir dans ma *Statique*, des équations toutes semblables ont lieu par rapport à trois axes *obliques* quelconques. Le principe des vitesses virtuelles n'est donc pas, dans ce nouvel exemple, aussi général que le principe de la *composition des forces*. Il n'est pas même aussi direct; car, s'il mène aux trois premières équations en employant les coordonnées rectangles x, y, z, il ne peut plus donner les trois dernières équations que par un changement de ces coordonnées en d'autres d'une espèce différente, et dont le choix paraît arbitraire, ou ne semble fait que pour obtenir des équations d'équilibre que l'on connaissait d'avance.

Au reste, quoique Lagrange nous laisse entendre que dans sa méthode on peut employer toute espèce de coordonnées, pourvu qu'elles soient propres à déterminer les lieux des corps, il est fort remarquable que ce géomètre n'en ait jamais employé d'autres que celles qui conviennent réellement au principe des vitesses virtuelles : du moins je n'en connais pas d'exemple, et je crois même qu'on n'en trouverait point dans ses écrits. Car si, pour la solution de quelque problème, il avait essayé l'emploi de certaines coordonnées non permises dans sa méthode, il est très-probable que, par l'erreur sensible de quelque résultat, il eût été averti du défaut de ses formules; et alors il n'aurait pas manqué de faire lui-même, à ce sujet, une remarque expresse, au moins dans la seconde édition de son bel ouvrage.

8. Quoi qu'il en soit, tout aurait pu se corriger d'une manière très-simple, et qu'il me paraît bon d'indiquer avant de terminer cette Note, parce qu'on y voit sur-le-champ ce qui cause l'erreur, et, de plus, ce qu'il faudrait faire pour l'éviter, sans exclure l'emploi de ces coordonnées qui y donnent lieu.

Et, en effet, quelle que soit la nature de ces coordonnées ξ, π, σ,..., dans lesquelles on veuille transformer les lignes ou rayons vecteurs p, q, r,..., il est certain qu'on peut toujours, avec Lagrange, poser l'équation parfaitement exacte

$$\mathrm{P}dp + \mathrm{Q}dq + \mathrm{R}dr + \ldots = \Xi d\xi + \Pi d\pi + \Sigma d\sigma + \ldots,$$

où Ξ, Π, Σ,... ont les valeurs exprimées par les équations du n° 1.

Or, maintenant j'observe que, dans le premier membre, les différentielles dp, dq, dr,... marquent bien les vitesses virtuelles du point d'application des forces suivant les lignes p, q, r,..., et qu'ainsi chaque terme $\mathrm{P}dp$ est le *moment virtuel* de la force P. Si, dans le second membre, les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,... ont la même propriété, c'est-à-dire si chacune $d\xi$ marque la vitesse virtuelle du point suivant ξ, chaque terme $\Xi d\xi$ sera aussi le moment virtuel d'une force représentée par Ξ ; et alors, de cette équation, qui présente deux sommes de moments virtuels, toujours égales de part et d'autre, on peut très-bien conclure que le système des forces Ξ, Π, Σ,.... est capable de remplacer le système des forces proposées P, Q, R,....

Mais si les différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,... n'ont pas la propriété dont il s'agit, chaque terme $\Xi d\xi$ ne sera pas le moment virtuel d'une force telle que Ξ, et, d'après le principe même des vitesses virtuelles, on ne pourra pas conclure, comme ci-dessus, que l'ensemble des forces Ξ, Π, Σ,... soit équivalent à l'ensemble des forces proposées. C'est là précisément qu'on tomberait dans cette erreur singulière de tirer d'un principe vrai et d'une équation exacte, une conséquence fausse, parce qu'on aurait oublié d'observer que cette équation n'est pas actuellement sous une forme qui convienne à l'expression du principe. Et, en même temps, c'est là qu'on voit le moyen d'éviter cette erreur sans changer les coordonnées ξ, π, σ,... qui pourraient y donner lieu.

Car, si l'on voulait avoir les vraies forces Ξ', Π', Σ',..., qui, dirigées suivant les coordonnées ξ, π, σ,..., sont capables de remplacer les forces P, Q, R, S,..., il faudrait commencer par mettre dans l'équation, au lieu des différentielles $d\xi$, $d\pi$, $d\sigma$,..., leurs valeurs en fonction des vitesses virtuelles mêmes, que je désignerai, comme au n° **3**, par $\partial\xi$, $\partial\pi$, $\partial\sigma$,...; ensuite, rassembler en un seul terme tous ceux qui seraient affectés de $\partial\xi$, de même en un seul tous les termes affectés de $\partial\pi$,...; et alors, notre même équation étant mise sous la forme nouvelle

$$\mathrm{P}\,dp + \mathrm{Q}\,dz + \mathrm{R}\,dr + \ldots = \Xi'\partial\xi + \Pi'\partial\pi + \Sigma'\partial\sigma + \ldots,$$

on pourrait rigoureusement conclure que l'ensemble des forces Ξ', Π', Σ',... équivaut parfaitement à l'ensemble des forces P, Q, R,... puisque la somme des moments virtuels est toujours égale de part et d'autre.

9. Si l'on veut faire ce calcul pour le cas des coordonnées ξ, π, σ parallèles à trois axes obliques, on trouvera, en conservant les dénominations du n° **3**, les valeurs suivantes :

$$\Xi' = \frac{\Xi(1-\nu^2) + \Pi(\mu\nu - \lambda) + \Sigma(\lambda\nu - \mu)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu},$$

$$\Pi' = \frac{\Pi(1-\mu^2) + \Sigma(\lambda\mu - \nu) + \Xi(\mu\nu - \lambda)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu},$$

$$\Sigma' = \frac{\Sigma(1-\nu^2) + \Xi(\lambda\mu - \nu) + \Pi(\lambda\nu - \mu)}{1-\lambda^2-\mu^2-\nu^2+2\lambda\mu\nu},$$

valeurs qui ne sont pas, comme on voit, les mêmes que celles de Ξ, Π, Σ, et qui n'y pourraient revenir que dans le cas des cosinus λ, μ, ν, tous trois nuls, c'est-à-dire dans le cas de trois axes rectangulaires entre eux : ce qui éclaire et confirme notre précédente analyse.

10. On voit aussi, par ces mêmes expressions, que les équations

$$\Xi' = 0, \quad \Pi' = 0, \quad \Sigma' = 0$$

entraînent les suivantes :

$$\Xi = 0, \quad \Pi = 0, \quad \Sigma = 0,$$

et réciproquement. Si donc on ne demandait que les conditions de l'équilibre entre les forces P, Q, R,..., on pourrait, sans avoir d'erreur à craindre, se contenter de poser les trois équations

$$0 = \Xi = P\frac{dp}{d\xi} + Q\frac{dq}{d\xi} + \ldots,$$

$$0 = \Pi = P\frac{dp}{d\pi} + Q\frac{dq}{d\pi} + \ldots,$$

$$0 = \Sigma = P\frac{dp}{d\sigma} + Q\frac{dq}{d\sigma} + \ldots.$$

Mais si les forces P, Q, R,... n'étant point en équilibre entre elles, on demande de les réduire à d'autres dirigées suivant ξ, π, σ, il faudra nécessairement prendre pour les forces équivalentes, non pas Ξ, Π, Σ, mais bien les valeurs de Ξ', Π', Σ'.

Et ce que je viens de dire s'applique sans difficulté à un système quelconque de puissances qui agissent sur différents points liés entre eux comme on voudra. Ainsi les équations de l'équilibre, données par Lagrange (page 39 de la deuxième édition, art. 12 et suiv.), sont toujours bonnes; mais les formules données, à la fin de l'art. 15, pour l'équivalence de deux systèmes de forces, ne sont exactes que dans le cas de certaines coordonnées; etc., etc.

Nous aurions encore plusieurs choses à dire sur ce point de doctrine ; mais cette discussion est déjà longue, et nous pourrions d'ailleurs, s'il était nécessaire, y revenir dans une autre occasion.