JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ATHANASE DUPRÉ

Sur le nombre des divisions à effectuer pour obtenir le plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 41-64.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__41_0>

gallica NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme Gallica de la Bibliothèque nationale de France
http://gallica.bnf.fr/

et catalogué par Mathdoc dans le cadre du pôle associé BnF/Mathdoc
http://www.numdam.org/journals/JMPA

SUR LE NOMBRE DES DIVISIONS A EFFECTUER POUR OBTENIR LE PLUS GRAND COMMUN DIVISEUR ENTRE DEUX NOMBRES ENTIERS;

PAR M. ATHANASE DUPRÉ,
Professeur de Physique au Collége royal de Rennes [*].

Le nombre des opérations à effectuer pour obtenir le plus grand commun diviseur entre deux nombres entiers $A > a$ pouvant être considérable lorsque le plus petit des deux est fort grand, la recherche d'une limite propre à rassurer les calculateurs a attiré l'attention des analystes.

En octobre 1844, M. Lamé a établi (*Comptes rendus,* tome XIX, page 867) que le nombre des divisions à faire est nécessairement moindre que cinq fois le nombre des chiffres de a.

Précédemment, dans le tome VI de ce Journal (page 454), M. Binet avait démontré que ce nombre est moindre que $\frac{10}{3}\log a$ quand on prend la précaution de faire chaque division par excès ou par défaut, de manière à avoir un reste moindre que la moitié du diviseur.

Je partagerai en trois sections ce que j'ai à dire sur le même sujet. Dans la première, je supposerai, ainsi que M. Lamé, qu'on emploie la méthode ordinaire, qu'on fait toujours usage de restes positifs. Dans la deuxième, j'admettrai que le calculateur s'astreint à suivre l'utile recommandation de M. Binet, qu'il emploie des diviseurs toujours moindres que la moitié du précédent. Enfin, dans la troisième, je ferai voir qu'il est possible de faire usage de diviseurs encore plus petits, et je donnerai les limites relatives à leur emploi. On reconnaîtra aisément qu'une partie des idées que j'ai à développer m'ont été suggérées par la lecture de ce que M. Binet a écrit sur la même question.

---

[*] Ce travail a été présenté le 1er décembre 1845 à l'Académie des Sciences.

PREMIÈRE SECTION.

Soient A et $a < A$ les deux nombres proposés;

$a_1, a_2, \ldots, a_p$ les restes successifs, y compris le plus grand commun diviseur a_p;

α le nombre des chiffres de a.

On a évidemment les relations

$$(1)\quad \begin{cases} a \overset{=}{>} a_1 + a_2, \quad a_1 \overset{=}{>} a_2 + a_3, \quad a_2 \overset{=}{>} a_3 + a_4, \quad a_3 \overset{=}{>} a_4 + a_5, \quad a_4 \overset{=}{>} a_5 + a_6, \ldots, \\ a_{p-2} \overset{=}{>} a_{p-1} + a_p, \quad a_{p-1} \overset{=}{>} 2a_p, \end{cases}$$

dont la dernière exprime que le dernier quotient, auquel il ne correspond plus de reste, est au moins 2.

On en tire, en substituant successivement dans la première les valeurs de a_1, $a_2, \ldots$,

$$(2)\qquad a \overset{=}{>} 2a_2 + a_3 \overset{=}{>} 3a_3 + 2a_4 \overset{=}{>} 5a_4 + 3a_5 \overset{=}{>} 8a_5 + 5a_6 \overset{=}{>} \cdots$$

Les facteurs 1, 2, 3, 5, 8,..., qui multiplient les diviseurs, s'obtiennent (cela est évident d'après le mode de substitution) chacun en ajoutant ensemble les deux précédents, et constituent une série récurrente

$$g_0 = 1, \quad g_1 = 2, \quad g_2 = 3, \quad g_3 = 5, \ldots, \quad g_{p-2}, \quad g_{p-1}, \quad g_p,$$

dont M. Binet a trouvé le terme général

$$g_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2} \right)^{n+2} \right]$$

(voyez *Comptes rendus*, tome XVII, page 563), et sur les propriétés de laquelle M. Lamé a établi son ingénieuse démonstration.

D'après cela, on peut écrire les inégalités (2) ainsi :

$$(3)\quad a \overset{=}{>} g_1 a_2 + g_0 a_3 \overset{=}{>} g_2 a_3 + g_1 a_4 \overset{=}{>} \cdots \overset{=}{>} g_{p-2}\, a_{p-1} + g_{p-3}\, a_p \overset{=}{>} (2g_{p-2} + g_{p-3})\, a_p,$$

et, comme

$$2g_{p-2} + g_{p-3} = g_{p-2} + (g_{p-2} + g_{p-3}) = g_{p-2} + g_{p-1} = g_p,$$

on a enfin

$$(4) \qquad a \overset{=}{>} g_p a_p \overset{=}{>} g_p;$$

d'où

$$a \overset{=}{>} \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^{p+2} - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^{p+2}\right],$$

et, prenant les logarithmes en négligeant le second terme du deuxième membre,

$$(5) \qquad \log a < \alpha > p.0,2089876 + 0,0684902.$$

L'abandon du second terme est légitime quand p est impair; lorsqu'il est pair et égal à 2, le second membre a pour valeur 3, son logarithme est 0,4771213, plus faible que celui que nous employons de 0,0093444, quantité qui, retranchée de 0,0684905, change l'inégalité (5) en

$$(6) \qquad \alpha > p.0,2089876 + 0,0591461.$$

Pour $p > 2 \overset{=}{>} 4$, la correction serait moindre par une double cause; et parce que le second terme serait moindre, et parce que, à des différences égales entre les nombres, correspondent des différences entre les logarithmes d'autant plus petites que les nombres sont plus grands. L'inégalité (6) est donc générale, et l'on en conclut

$$(7) \qquad p < 4,785\,\alpha - 0,28301.$$

On peut même prendre plus simplement

$$(8) \qquad p < 4,785\,\alpha - 0,3;$$

car, pour $p \overset{=}{>} 4$, la correction est beaucoup moindre, le terme négatif est numériquement supérieur à 0,3; et, pour $p = 2$, l'inégalité (8) ne peut induire en erreur, puisque son second membre est toujours plus grand que 4.

Par ce procédé, nous arrivons, comme on voit, à une limite un peu inférieure à celle de M. Lamé, qui se trouve par conséquent démontrée exacte à fortiori, ainsi que $p < \frac{24}{5}\alpha$.

On peut objecter à la vérité que cette démonstration est moins propre à entrer dans l'enseignement élémentaire, à cause de l'emploi du terme général d'une série récurrente; mais il est facile de la modifier.

Reprenons l'inégalité (4): on y peut remplacer g_p par une quantité plus petite k^p; après quoi, prenant les logarithmes, on arrive à

$$\alpha > p . \log k,$$

d'où l'on tire

$$p < \frac{1}{\log k}\alpha. \tag{9}$$

Tout se réduit donc à déterminer k de manière que g_p surpasse k^p, quel que soit p. Pour cela, remarquons que l'on doit avoir

$$g_n \geqq k^n, \quad g_{n+1} \geqq k^{n+1}, \quad g_{n+2} \geqq k^{n+2},$$

et, comme

$$g_{n+2} = g_{n+1} + g_n,$$

les deux premières relations étant vraies, il suffit, pour que la troisième se vérifie, que l'on ait

$$k^{n+2} \leqq k^{n+1} + k^n,$$

d'où, en prenant l'égalité qui est plus avantageuse,

$$k^2 = k + 1 \quad \text{et} \quad k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}.$$

D'ailleurs, cette valeur convient évidemment aux inégalités

$$g_0 = 1 \geqq k^0 \quad \text{et} \quad g_1 = 2 > k^1 = \frac{1+\sqrt{5}}{2};$$

donc elle convient à l'inégalité $g_2 > k^2$ et, de proche en proche, à toutes les suivantes. En substituant dans l'équation (9), on obtient enfin la limite

$$p < 4,785\,\alpha.$$

Soit, plus généralement,

$$g_n = r g_{n-1} + q g_{n-2} + \ldots \tag{10}$$

l'équation qui fait connaître un terme d'une série récurrente au moyen des précédents et dans laquelle r, q,... sont supposés positifs; k étant la seule racine positive (plus grande que l'unité quand $r + q + \ldots > 1$) de l'équation

$$(11) \qquad k^n = rk^{n-1} + qk^{n-2} + \ldots,$$

on aura

$$(12) \qquad g_n > k^n y,$$

quel que soit n, pourvu que cette relation soit vraie pour $n = 0, 1, 2, \ldots$ jusqu'à h; h étant le nombre des termes de l'échelle de relation.

En effet, admettons les inégalités

$$g_{n-1} > k^{n-1}y, \quad g_{n-2} > k^{n-2}y, \ldots,$$

et ajoutons-les, après les avoir multipliées par r, q,..., il viendra

$$rg_{n-1} + qg_{n-2} + \ldots > (rk^{n-1} + qk^{n-2} + \ldots)\, y,$$

ou, d'après les équations (10) et (11),

$$g_n > k^n y.$$

Ainsi, on voit que l'inégalité (12), étant vraie par hypothèse jusqu'à $n = h$, l'est pour $n = h + 1$, et, de proche en proche, pour toute valeur de n. Il reste seulement à voir dans chaque cas particulier s'il est possible de choisir y de manière à vérifier l'hypothèse.

Nous aurons à considérer plus loin des séries récurrentes du second ordre où $g_0 = 1 = q$, $g_1 = r$, nombre entier positif; les inégalités à vérifier au moyen de y seront

$$1 \overset{=}{>} k^0 y = y \quad \text{et} \quad r \overset{=}{>} ky;$$

celle-ci donne

$$y \overset{=}{<} \frac{r}{k},$$

et, comme la substitution de r à la place de k, dans l'équation

$$k^2 = rk + 1,$$

montre que cette quantité est inférieure à k, on voit que y est plus petit que l'unité, et que la première inégalité est aussi vérifiée. Par conséquent, dans ces sortes de séries, on a toujours

$$(13) \qquad g_n > k^n y = rk^{n-1}.$$

Ici k n'est autre chose que la limite, pour $n = \infty$, de $\frac{g_{n+1}}{g_n}$, et les divers rapports $\frac{g_1}{g_0}, \frac{g_2}{g_1}, \frac{g_3}{g_2}, \ldots$ sont les réduites de cette quantité exprimée en fraction continue

$$k = r + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{r + \text{etc.}}}$$

Les réduites de rangs impairs sont, comme on sait, plus petites que k, et vont en augmentant; les autres sont plus grandes que k et vont en diminuant.

Au lieu d'appliquer les limites précédentes au nombre des divisions, il est permis de les appliquer à celui des divisions *partielles*, en faisant exception pour la première division qui se compose d'un nombre de divisions partielles évidemment tout à fait indéterminé quand on ne considère que a.

En effet, soient a_n, $a_{n+n'}$, $a_{n+n'+n''}$ des dividendes correspondant à des quotients de 2, 3, 2 chiffres; on aura, au moyen des inégalités (1) et (2), appliquées à ce cas, les relations

$$a \overset{=}{>} (10 g_{n-2} + g_{n-3}) a_n, \qquad a_n > (100 g_{n'-2} + g_{n'-3}) a_{n+n'},$$

$$a_{n+n'} > (10 g_{n''-2} + g_{n''-3}) a_{n+n'+n''}, \qquad a_{n+n'+n''} > g_{p-n-n'-n''} a_p.$$

En y remplaçant $2g_{n-2} + g_{n-3}$ par g_n, et $8g_{n-2}$ par $2\frac{2}{3}g_n$, ce qui est permis, puisque l'on a

$$3g_{n-2} > 2g_{n-2} + g_{n-3} = g_n,$$

et ainsi pour les autres g, on trouve

$$a > 3\tfrac{2}{3} g_n a_n, \quad a_n > 33\tfrac{2}{3} g_{n'} a_{n+n'}, \quad a_{n+n'} > 3\tfrac{2}{3} g_{n''} a_{n+n'+n''}.$$

Puis, multipliant entre elles toutes ces inégalités, il vient

$$a > (3\tfrac{2}{3})^2 . (33\tfrac{2}{3}) . g_n . g_{n'} . g_{n''} . g_{p-n-n'-n''}\, a_p;$$

d'où l'on conclut, à fortiori,

$$a > (3\tfrac{2}{3})^2.(33\tfrac{2}{3}).k^p,$$

car on a vu précédemment que $g_n > k^n$, etc.

Il est facile de généraliser cette inéquation où les facteurs $3\frac{2}{3}$, $33\frac{2}{3}$ et les facteurs analogues $333\frac{2}{3}$,..., qui correspondent aux quotients à 4, 5,... chiffres, entrent évidemment chacun autant de fois qu'il y a de quotients du nombre de chiffres correspondant. Elle devient

$$(14) \qquad a > (3\tfrac{2}{3})^{n_2}.(33\tfrac{2}{3})^{n_3}.(333\tfrac{2}{3})^{n_4}\ldots k^p,$$

en désignant par n_2, n_3, n_4 les nombres des quotients à 2, 3, 4,... chiffres. En prenant les logarithmes, on obtient

$$\alpha > p\log k + n_2\log 3\tfrac{2}{3} + n_3\log 33\tfrac{2}{3} + \ldots,$$

d'où

$$\alpha > (p + n_2 + 2n_3 + \ldots)\log k + n_2(\log 3\tfrac{2}{3} - \log k) \\ + n_3(\log 33\tfrac{2}{3} - 2\log k) + \text{etc.},$$

et, en faisant les calculs numériques, et posant le nombre des divisions partielles $p + n_2 + 2n_3\ldots = \mathrm{P}$,

$$\alpha > \mathrm{P}.0{,}2089876 + n_2.0{,}3552759 + n_3.1{,}1092163 \\ + n_4.1{,}8963413 + \text{etc.}$$

Résolvant par rapport à P, et conservant seulement les parties entières des coefficients des n, ce qui est permis, on arrive à

$$(15) \qquad \mathrm{P} < 4{,}785\,\alpha - n_2 - 5n_3 - 9n_4 - \ldots.$$

La quantité $n_2 + 5n_3 + \ldots$ vaut toujours au moins 1; ainsi l'inégalité (8) est vraie à fortiori quand on y change p en P, ce qu'il fallait démontrer. On ne peut pas craindre que n_l ait un coefficient positif pour certaines valeurs de l plus grandes que celles que nous avons considérées, car le logarithme de $33\ldots3\frac{2}{3}$ sera toujours $> l - 2$ et $l - 1$ fois le logarithme de $k < \frac{l-1}{3}$, puisque $k < \frac{1}{3}$; par suite, $[\log 33\ldots3\frac{2}{3} - (l-1)\log k]$ sera toujours une quantité positive, $l - 2$ surpassant $\frac{l-1}{3}$ dès que l surpasse $\frac{5}{2}$.

DEUXIÈME SECTION.

Maintenant supposons qu'on s'astreigne à faire chaque division par excès ou par défaut, de manière à avoir un reste moindre que la moitié du diviseur, ce qui est évidemment toujours possible, puisque les deux restes R et $R_1 < R$, ayant pour somme le diviseur, sont l'un plus grand et l'autre plus petit que sa moitié, si ce n'est quand ils sont égaux, cas dans lequel l'opération se termine immédiatement.

En appelant q le quotient de a_n par a_{n+1}, et r le reste, on aura

$$a_n = a_{n+1} q + r;$$

mais q égale ou surpasse 2, et r égale ou surpasse a_{n+2} ; ainsi on peut affirmer que l'un quelconque des diviseurs égale ou surpasse deux fois le suivant, augmenté de celui qui a le second rang après lui. Par suite,

$$a_n \overset{=}{>} 2a_{n+1} + a_{n+2}, \quad a_{n+1} \overset{=}{>} 2a_{n+2} + a_{n+3}, \quad a_{n+2} \overset{=}{>} 2a_{n+3} + a_{n+4}, \ldots,$$

et, en faisant les substitutions convenables,

$$(16) \qquad a_n \overset{=}{>} 2a_{n+1} + a_{n+2} \overset{=}{>} 5a_{n+2} + 2a_{n+3} \overset{=}{>} 12 a_{n+3} + 5a_{n+4} \ldots$$

Les nombres $g_0 = 1$, $g_1 = 2$, $g_2 = 5$, $g_3 = 12, \ldots$ sont évidemment chacun égal au double du précédent, augmenté de l'anté-précédent, et ils constituent une série récurrente dont le terme général, calculé par les méthodes connues, est

$$g_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

D'après cela, on peut écrire ainsi les inégalités (16),

$$a_n \overset{=}{>} g_1 a_{n+1} + g_0 a_{n+2} \overset{=}{>} g_2 a_{n+2} + g_1 a_{n+3} \overset{=}{>} g_3 a_{n+3} + g_2 a_{n+4}, \ldots,$$

et, généralement,

$$(17) \qquad a_n \overset{=}{>} g_{n'} a_{n+n'} + g_{n'-1} a_{n+n'+1};$$

à fortiori,

(18) $$a_n \overset{=}{>} g_{n'} a_{n+n'}.$$

Quand on fait dans cette inégalité $n = 0$, $n' = p$, il vient

(19) $$a \overset{=}{>} g_p . a_p,$$

ce qui donne, à fortiori,

(20) $$a \overset{=}{>} g_p.$$

Pour la série actuelle, on a

$$r = 2, \quad k = 1 + \sqrt{2},$$

et l'inégalité (20) peut être remplacée par

$$a > 2(1 + \sqrt{2})^{p-1},$$

d'où

$$\alpha > p.0,38277 55 - 0,0817457.$$

En résolvant cette dernière inégalité par rapport à p, on trouve enfin pour limite

(21) $$p < 2,6125\alpha + 0,21357.$$

On pourrait diminuer un peu le second terme en choisissant y (page 45), non pas de manière à vérifier

$$g_0 > k^0 y, \quad g_1 > k^1 y,$$

mais bien de manière à avoir

$$g_{10} = 5741 \underset{=}{>} k^{10} y = (1 + \sqrt{2})^{10} y,$$

$$g_{11} = 13860 \overset{=}{>} k^{11} y = (1 + \sqrt{2})^{11} y;$$

on sera sûr alors d'avoir $g_p > k^p y$ tant que p surpassera 10. L'emploi des logarithmes donne $\log y = -0,0688$ comme vérifiant les deux inégalités. Mettant $p \log(1 + \sqrt{2}) - 0,0688$ à la place de $\log g_p$ dans l'équation (20), on trouve

(22) $$p < 2,6125\,\alpha + 0,1807,$$

inégalité qui ne pourrait être inexacte que pour $p < 10$; mais comme, dans ce cas, ses indications s'accordent avec celles de l'inégalité (21), on est assuré de sa généralité.

Reprenons l'inégalité (20) et mettons-y la valeur exacte de g_p pour obtenir une limite minimum entre toutes celles que peut fournir ce procédé, il vient

$$a \overset{=}{>} \frac{(1+\sqrt{2})^{p+1} - (1-\sqrt{2})^{p+1}}{2\sqrt{2}}.$$

Dans le cas de p pair, le second terme est positif et peut être supprimé; en prenant les logarithmes, on obtient

$$\alpha > p.0,38227755 - 0,0687695. \tag{23}$$

Lorsque p est impair et égal à 3, $g_p = 12$ et a pour logarithme 1,0791812, quantité plus faible que $p.0,38227755 - 0,0687695$ de 0,0003758. En faisant porter la correction sur le second terme, l'inégalité devient

$$\alpha > p.0,38227755 - 0,0691453.$$

Pour $p > 3$, la correction serait plus faible, et parce que le second terme de g serait moindre, et parce que g serait plus grand. Cette inégalité est donc générale, et l'on en tire la limite (22) déjà trouvée. On pourrait ne pas faire subir de correction à l'inégalité (23), cela donnerait

$$p < 2,6125\alpha + 0,1797; \tag{24}$$

on aurait encore une limite exacte: car, pour $p \overset{=}{>} 11$, la correction n'influe pas sur les chiffres conservés, et, pour $p < 11$, l'inégalité (24) donne les mêmes résultats entiers que l'inégalité (22).

Ces limites conduisent à fortiori à des limites plus simples et moins approchées. En réduisant le coefficient de α en fraction continue, on trouve que les réduites qu'il est permis d'employer sont

$$3,\quad \tfrac{8}{3},\quad \tfrac{34}{13},\quad \tfrac{81}{31},\quad \tfrac{209}{80}.$$

En prenant la seconde, on peut supprimer le terme indépendant de α; en effet, l'équation (24) peut être écrite de la sorte

$$p < 2,6666\,\alpha + (0,1797 - 0,0541\,\alpha),$$

et, comme la quantité entre parenthèses est négative toutes les fois que α surpasse 3, on peut la supprimer et réduire la limite à

(25) $$p < \tfrac{8}{3}\alpha,$$

pourvu que cette inégalité subsiste pour $\alpha = 1, 2, 3$. Or, $\alpha = 1$ et 2 donne p au plus égal à 2 et 5, ce qui est exact d'après l'équation (24); $\alpha = 3$ donne $p < 8$, et l'équation (24) donne $p < 8{,}0172$, ce qui laisse craindre $p = 8$, circonstance qui se présente, en effet, quand

$$\mathrm{A} = g_9 = 2378 \quad \text{et} \quad a = g_8 = 985.$$

On peut donc admettre la limite $\frac{8}{3}\alpha$, mais avec la restriction que, pour $\alpha = 3$, on prendra $p \leqq 8$, et non pas seulement $p < 8$.

Afin de mettre ceci dans le cas d'être présenté à ceux qui n'ont pas étudié les théorèmes relatifs aux séries récurrentes, on peut prouver, pour la série actuelle, que son terme général a vraiment pour expression

$$g_n = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}}.$$

Pour cela, supposons cette vérité établie jusqu'à g_n inclusivement, et montrons que la même expression conviendra pour g_{n+1}, c'est-à-dire qu'on aura

$$g_{n+1} = \frac{(1+\sqrt{2})^{n+2} - (1-\sqrt{2})^{n+2}}{2\sqrt{2}} = 2.\frac{(1+\sqrt{2})^{n+1} - (1-\sqrt{2})^{n+1}}{2\sqrt{2}} + \frac{(1+\sqrt{2})^{n} - (1-\sqrt{2})^{n}}{2\sqrt{2}}.$$

Cette équation, en supprimant le dénominateur commun $2\sqrt{2}$, et mettant en facteur commun $(1+\sqrt{2})^n$ et $(1-\sqrt{2})^n$, se réduit à

$$\left.\begin{aligned} &(1+\sqrt{2})^n(1 + 2\sqrt{2} + 2 - 2 - 2\sqrt{2} - 1) \\ -\,&(1-\sqrt{2})^n(1 - 2\sqrt{2} + 2 - 2 + 2\sqrt{2} - 1) \end{aligned}\right\} = 0.$$

Elle se vérifie évidemment et laisse seulement à établir que l'expression de g_n est exacte pour $n = 0$ et $n = 1$, ce qui n'offre aucune difficulté. Cette démonstration s'applique d'ailleurs à toutes les séries analogues et peut être présentée d'une manière générale.

Les limites trouvées dans cette section peuvent être appliquées au nombre des divisions partielles.

Soient a_n, $a_{n+n'}$, $a_{n+n'+n''}$ des dividendes correspondants à des quotients de 2, 3, 2 chiffres, on aura

$$a_n > 10 a_{n+1}, \quad a_{n+n'} > 100 a_{n+n'+1}, \quad a_{n+n'+n''} > 10 a_{n+n'+n''+1};$$

en changeant dans l'inégalité (18) n et n' successivement en 0 et n, $n+1$ et $n'-1$, $n+n'+1$ et $n''-1$, $n+n'+n''+1$ et $p-n-n'-n''-1$, on obtient aussi

$$a > g_n a_n, \quad a_{n+1} > g_{n'-1} a_{n+n'}, \quad a_{n+n'+1} > g_{n''-1} a_{n+n'+n''},$$
$$a_{n+n'+n''+1} > g_{p-n-n'-n''-1} a_p.$$

Multipliant ensemble toutes ces inégalités et faisant les réductions, on trouve

$$a > 10^2 . 100 . g_n . g_{n'-1} . g_{n''-1} . g_{p-n-n'-n''-1} a_p.$$

Puis, prenant les logarithmes, après avoir supprimé a_p et remplacé g_n par rk^{n-1}, $g_{n'-1}$ par $rk^{n'-2}$, etc., on obtient, en généralisant la formule, ce qui est facile,

$$\begin{aligned} \alpha > \mathrm{P}\log k &+ (n_2 + 2n_3 + 3n_4 + \ldots)(1 - \log k) \\ &+ (n_2 + n_3 + n_4 + \ldots)(\log 2 - 2\log k), \end{aligned}$$

P, n_2, n_3,... ayant le même sens que page 47. De là on conclut

$$(26) \qquad \left\{ \begin{aligned} \mathrm{P} < 2{,}6125\alpha &- (n_3 + 2n_4 + 3n_5 + \ldots)\, 1{,}6124 \\ &- (n_2 + n_3 + n_4 + \ldots)\, 0{,}3989, \end{aligned} \right.$$

et, à fortiori,

$$\mathrm{P} < 2{,}6125\alpha + 0{,}1797,$$

ce qu'il fallait démontrer. On pourrait, en se servant de l'inégalité (17) au lieu de l'inégalité (18), arriver à une limite plus restreinte encore que l'inégalité (26); mais je n'y vois pas grande utilité.

TROISIÈME SECTION.

En recommandant l'emploi du plus petit R_1 des deux restes R et R_1 de chaque division faite par excès et par défaut, M. Binet a rendu beaucoup moindre le nombre des opérations à redouter dans la recherche du plus grand commun diviseur. On pourrait, je crois, faire usage de diviseurs encore plus petits et obtenir une nouvelle amélioration. Ainsi, R_1 est toujours moindre que la moitié du diviseur a', mais il peut être compris entre $\frac{a'}{3}$ et $\frac{a'}{2}$; dans ce dernier cas, R est compris entre $\frac{a'}{2}$ et $\frac{2a'}{3}$; la différence $R - R_1$, facile à écrire, est entre o et $\frac{a'}{3}$: qu'on la prenne pour diviseur et R ou R_1 pour dividende, alors on pourra affirmer que chaque diviseur surpassera trois fois le diviseur suivant.

Semblablement, que l'on s'astreigne à choisir pour diviseur la plus petite des quantités R_1, $R - R_1$, $R - 2R_1$ et pour dividende R avec la première, R ou mieux R_1 avec la deuxième, et R_1 avec la troisième; alors on pourra affirmer que chaque diviseur surpassera quatre fois le suivant. En effet, cette circonstance a lieu pour R_1 quand $R_1 < \frac{a'}{4}$: pour $R - 2R_1 = a' - 3R_1$ quand R_1 est compris entre $\frac{a'}{4}$ et $\frac{5a'}{12}$: pour $R - R_1 = a' - 2R_1$, depuis $R_1 = \frac{3a'}{8}$ jusqu'à $R_1 = \frac{a'}{2}$. On voit qu'on a même deux des diviseurs proposés qui sont en même temps plus petits que $\frac{a'}{4}$ lorsque R_1 est entre $\frac{5a'}{12}$ et $\frac{3a'}{8}$, c'est-à-dire entre $\frac{10a'}{24}$ et $\frac{9a'}{24}$.

Si les précautions à prendre ne devenaient pas bientôt plus pénibles que l'opération ordinaire, on pourrait aller de plus en plus loin. Pour établir cela, remarquons que, au lieu de R et R_1, on peut prendre pour continuer la recherche du plus grand commun diviseur les quantités

$$mR + nR_1 \quad \text{et} \quad m'R + n'R_1,$$

m, n, m', n' étant des entiers tels que l'on ait les équations

$$\left\{\begin{array}{l} L(mR + nR_1) + L'(m'R + n'R_1) = R, \\ H(mR + nR_1) + H'(m'R + n'R_1) = R_1, \end{array}\right. \tag{27}$$

dans lesquelles L, L', H, H' sont des entiers convenables. Cela tient à ce que, d'une part, le plus grand commun diviseur entre R et R_1 divise évidemment les deux nouvelles quantités qui contiennent R ou R_1 dans tous leurs termes, et, d'autre part, le plus grand commun diviseur entre $mR + nR_1$ et $m'R + n'R_1$ divise les premiers membres des équations (27), et, par conséquent, R et R_1.

De ces équations on tire

$$(28) \qquad \begin{cases} Lm + L'm' = 1, & Ln + L'n' = 0, \\ Hm + H'm' = 0, & Hn + H'n' = 1. \end{cases}$$

La première équation (28) fait voir que L et L', m et m' sont premiers entre eux; la dernière montre la même chose pour H et H', n et n'. La seconde prouve que L et L' sont des multiples de n' et n, de sorte qu'on peut poser $L = n't$, $L = -nt$, t étant entier. Alors la première devient

$$mn' - m'n = \frac{1}{t},$$

d'où il suit que $t = \pm 1$. Ainsi, la condition pour que les deux premières équations puissent être vérifiées par certaines valeurs L, L' est que l'on ait

$$(29) \qquad mn' - m'n = \pm 1.$$

Quant aux deux autres, elles conduisent au même résultat, et il est *suffisant* qu'on choisisse m, n, m', n' de manière à satisfaire à cette équation pour qu'on puisse affirmer que le plus grand commun diviseur entre $mR + nR_1$ et $m'R + n'R_1$ est le même que le plus grand commun diviseur entre R et R_1.

La réciproque est vraie: deux nombres B et C, qui ont le même plus grand commun diviseur que R et R_1, sont toujours fournis par les expressions $mR + nR_1$, $m'R + n'R_1$, m, n, m', n' satisfaisant à l'équation (29).

Pour le prouver, soit posé

$$mR + nR_1 = B, \quad m'R + n'R_1 = C,$$

R et R_1 n'ont pas de commun diviseur qui ne divise en même temps B et C, et, cela étant, on sait qu'il existe certainement des valeurs de m, n, m', n' qui vérifient ces deux équations. En les adoptant, les équations (27) deviennent

$$LB + L'C = R, \quad HB + H'C = R_1,$$

et, par les mêmes raisons, on voit qu'il existe aussi des valeurs de L, L′, H, H′ qui les vérifient, ce qui, comme il a été établi plus haut, conduit à la relation (29).

Cela étant, on peut choisir m' et n' de manière à avoir un diviseur $m'R + n'R_1$ plus petit que la moitié, le tiers, le quart, etc., du diviseur précédent. Par exemple, $m' = 0$, $n' = 1$ donnent R_1; $m' = 1$ et $n' = -1$ ou -2, donnent $R - R_1$, $R - 2R_1$, qu'on obtient très-facilement et dont il a été question plus haut; enfin m' et n' peuvent être choisis arbitrairement parmi les nombres premiers entre eux, comme le fait voir l'équation (29) qui fournit ensuite pour m et n des valeurs entières dont on emploie les plus convenables.

Si l'on avait un moyen plus prompt que la recherche du plus grand commun diviseur pour choisir m' et n' le plus avantageusement possible, c'est-à-dire de telle sorte que le diviseur $m'R + n'R_1$ soit minimum, ce diviseur serait lui-même le plus grand commun diviseur cherché, et, comme ce qui se dit de R et R_1 peut s'appliquer aux deux nombres proposés, on n'aurait aucune division à faire. Cela résulte de ce que l'équation

$$m'R + n'R_1 = D$$

peut toujours être vérifiée, puisque R et R_1 n'ont aucun facteur commun qui ne soit dans leur plus grand commun diviseur D, et de ce que l'équation

$$m'R + n'R_1 = U < D$$

ne saurait admettre des valeurs entières pour m' et n', attendu que D divise R et R_1, et ne divise pas U. Toutefois, il faut excepter le cas de $U = 0$ qui répond à deux valeurs exclusivement acceptables pour m' et n', savoir, $m' = \pm \frac{R_1}{D}$ et $n' = \mp \frac{R}{D}$; dans ce cas, l'une des deux quantités est 0 qui admet pour diviseurs tous les nombres entiers, et l'autre est $mR + nR_1 = \pm D$, comme on le voit en substituant dans l'équation (29) les valeurs actuelles de m' et n'; de sorte que le plus grand commun diviseur est encore convenable dans ce cas particulier, et, de plus, il est connu.

En s'astreignant à prendre pour diviseur R_1, ou la plus petite des quantités R_1, $R - R_1$, ou la plus petite des quantités R_1, $R - 2R_1$, $R - R_1$, on peut regarder chaque diviseur comme plus grand que deux, trois, quatre fois le suivant. Il est naturel de se demander si la loi que l'analogie semble indiquer est vraie, si, en s'astreignant à prendre pour diviseur la plus petite des quantités

$$R - R_1, \quad R - 2R_1, \ldots, \quad R - (b-2)R_1, \quad R_1,$$

on peut affirmer qu'un diviseur quelconque a' surpasse b fois le suivant. Pour résoudre cette question, cherchons pour quelles valeurs de R_1 il arrive que la quantité

$$R - qR_1 = a' - (q+1)R_1$$

est plus petite que $\frac{a'}{b}$. Si $R_1 < \frac{a'}{q+1}$, l'inégalité $a' - (q+1)R_1 < \frac{a'}{b}$ donne

$$R_1 > \frac{b-1}{b(q+1)}a';$$

si, au contraire, $R_1 > \frac{a'}{q+1}$, il faut poser

$$qR_1 - R = (q+1)R_1 - a' < \frac{a'}{b},$$

ce qui donne

$$R_1 < \frac{b+1}{b(q+1)}a'.$$

C'est donc depuis $R_1 = \frac{b-1}{b(q+1)}a'$ jusqu'à $R_1 = \frac{b+1}{b(q+1)}a'$ que la quantité $R - qR_1$ se trouve plus petite que $\frac{a'}{b}$. En donnant à q toutes sortes de valeurs, il est facile de dresser le tableau suivant :

Quantités plus petites que $\frac{a'}{b}$.	Lorsque R_1 est compris entre des fractions de a' marquées par	
R_1	0	$\frac{1}{b}$
$R - (b-2)R_1$	$\frac{1}{b}$	$\frac{b+1}{b(b-1)}$
$R - (b-4)R_1$	$\frac{b-1}{b(b-2)}$	$\frac{b+1}{b(b-2)}$
$R - (b-4)R_1$	$\frac{b-1}{b(b-3)}$	$\frac{b+1}{b(b-3)}$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$R - R_1$	$\frac{b-1}{2b}$	$\frac{b+1}{2b} > \frac{1}{2}$.

R_1 étant compris entre o et $\frac{a'}{b}$, c'est cette quantité elle-même qu'il faut prendre pour diviseur; on prendrait $R - (b - 2)R_1$ si R_1 était entre $\frac{a'}{b}$ et $\frac{b+1}{b(b-1)}a'$, et ainsi de suite; mais il est nécessaire que toutes les valeurs possibles de R_1 tombent entre des quantités inscrites sur une même ligne dans la deuxième et la troisième colonne, et, comme elles sont évidemment rangées par ordre de grandeur dans chacune de ces deux colonnes, cela exige que la première quantité de chaque ligne soit inférieure à la seconde quantité de la ligne précédente ou lui soit égale. En d'autres termes, il faut qu'on ait

$$\frac{b-1}{b(q+1)}a' \overset{=}{<} \frac{b+1}{b(q+2)}a',$$

ou, ce qui est la même chose,

$$2q \overset{=}{>} b - 3.$$

Cette inégalité, devant être vérifiée pour $q = 1$, donne $b \overset{=}{<} 5$. Pour $q > 1$, elle sera vérifiée à fortiori; ainsi, jusqu'à $b = 5$ inclusivement, il suffit de prendre la plus petite des quantités

$$R - R_1,\quad R - 2R_1, \ldots,\quad R - (b-2)R_1,\quad R_1,$$

pour pouvoir affirmer que chaque diviseur surpasse b fois le suivant. Lorsque $b = 6$ ou 7, il est facile de prouver qu'il devient nécessaire et suffisant d'ajouter à cette série $2R - 3R_1$, et pour $b = 8$, d'ajouter en sus $2R - 5R_1$, $3R - 4R_1$, $3R - 7R_1$; c'est ce que font voir les tableaux suivants :

	Quantités plus petites que $\frac{a'}{b}$.	Lorsque R_1 est compris entre des fractions de a' marquées par	
$b = 6$	R_1	0	$\frac{1}{6}$
	$R - 4R_1$	$\frac{1}{6}$	$\frac{7}{30}$
	$R - 3R_1$	$\frac{5}{24}$	$\frac{7}{24}$
	$R - 2R_1$	$\frac{5}{18}$	$\frac{7}{18}$
	$2R - 3R_1$	$\frac{11}{30}$	$\frac{13}{30}$
	$R - R_1$	$\frac{5}{12}$	$\frac{1}{2}$.
$b = 7$	R_1	0	$\frac{1}{7}$
	$R - 5R_1$	$\frac{1}{7}$	$\frac{8}{42}$
	$R - 4R_1$	$\frac{6}{35}$	$\frac{8}{35}$
	$R - 3R_1$	$\frac{6}{28}$	$\frac{8}{28}$
	$R - 2R_1$	$\frac{6}{21}$	$\frac{8}{21}$
	$2R - 3R_1$	$\frac{13}{35}$	$\frac{15}{35}$
	$R - R_1$	$\frac{6}{14}$	$\frac{1}{2}$.
$b = 8$	R_1	0	$\frac{1}{8}$
	$R - 6R_1$	$\frac{1}{8}$	$\frac{9}{56}$
	$R - 5R_1$	$\frac{7}{48}$	$\frac{9}{48}$
	$R - 4R_1$	$\frac{7}{40}$	$\frac{9}{40}$
	$R - 3R_1$	$\frac{7}{32}$	$\frac{9}{32}$
	$2R - 5R_1$	$\frac{15}{56}$	$\frac{17}{56}$
	$3R - 7R_1$	$\frac{23}{80}$	$\frac{25}{80}$
	$R - 2R_1$	$\frac{7}{24}$	$\frac{9}{24}$
	$2R - 3R_1$	$\frac{15}{40}$	$\frac{17}{40}$
	$3R - 4R_1$	$\frac{23}{56}$	$\frac{25}{56}$
	$R - R_1$	$\frac{7}{16}$	$\frac{1}{2}$.

Au delà de $b = 5$, le choix à faire devient trop pénible, comme on voit, pour qu'il y ait lieu de s'y astreindre dans la pratique. Au reste, ces considérations conduisent quelquefois à remplacer des divisions fort simples par des soustractions avec lesquelles elles sont au fond tout à fait identiques; aussi sont-elles, dans bien des cas, plutôt propres à rassurer le calculateur sur la longueur des opérations qu'à les abréger beaucoup.

Quant à la limite propre à chaque cas considéré, on peut en obtenir une expression générale: comme on le verra plus loin, l'inégalité $a > g_p$ ou $\alpha > \log . g_p$ a encore lieu au moins jusqu'à $b = 5$, et g_p est le terme général d'une série récurrente du second ordre où $q = 1$, et dans laquelle r égale b. On aura donc, équation (13),

$$a > rk^{p-1} \quad \text{et} \quad \alpha > (p-1)\log k + \log r;$$

mais, k étant racine de l'équation

$$k^2 = rk + 1,$$

a pour valeur $\frac{r+\sqrt{r^2+4}}{2}$, ce qui conduit à

$$(30) \quad p < \frac{\alpha}{\log(r+\sqrt{r^2+4}) - \log 2} + 1 - \frac{\log r}{\log(r+\sqrt{r^2+4}) - \log 2}.$$

Dans le cas particulier où $r = 3$, cette inégalité devient

$$p < 1,9273\,\alpha + 0,0805.$$

Lorsque $r = 4$, on a

$$p < 1,6322\,\alpha + 0,0174;$$

$r = 5$ donne

$$p < 1,3979\,\alpha + 0,023,$$

et, si l'on préférait des résultats plus simples, mais moins approchés, on pourrait prendre, quand $r = 3$, $p < 2\alpha$; pour $r = 4$, $p < \frac{5}{3}\alpha$; enfin, pour $r = 5$, $p < \frac{7}{5}\alpha$ avec la restriction que, pour $\alpha = 5$, on pourra avoir $p \overset{=}{<} 7$; l'égalité a lieu quand les nombres proposés sont 509626 et 98145, c'est-à-dire g_8 et g_7. Les quotients sont alors tous égaux à 5, et les restes sont

$g_0 = 1$, $g_1 = 5$, $g_2 = 26$, $g_3 = 135$, $g_4 = 701$, $g_5 = 3640$ et $g_6 = 18901$.

Pour savoir si ces diverses limites peuvent être appliquées aux divisions *partielles*, reprenons l'inégalité

$$\alpha > \mathrm{P}\log k + (n_2 + \ldots)(1 - \log k)\ldots$$

de la page 52, qui est générale et ne change ici que parce que la valeur de k n'est plus la même. Dans le cas particulier où $0 = n_3 = n_4 \ldots$, elle devient

$$\alpha > \mathrm{P} \log k + n_2 (1 + \log r - 3 \log k),$$

et, comme n_2 peut être grand et rendre le terme dans lequel il entre plus considérable que le dernier terme de l'équation (30), il est nécessaire que l'on ait

$$(31) \qquad 1 + \log r \geqq 3 \log k = 3 \log \frac{r + \sqrt{r^2 + 4}}{2}.$$

En supprimant le nombre 4 sous le radical, on arrive à

$$1 > 2 \log r,$$

ce qui fait voir que r doit être au plus 3. D'ailleurs, ce nombre porté dans l'équation (31) ne vérifie pas cette inégalité qui est exacte seulement pour $r = 2$, cas déjà traité. Ainsi, les limites trouvées dans la troisième section ne sont point applicables aux divisions partielles, ou, si cela est pour quelqu'une d'elles, la première, par exemple, l'inégalité $\alpha > \mathrm{P} \log k +$ etc., de la page 52, ne peut, telle qu'elle est, servir à le démontrer.

Il reste maintenant à prouver l'exactitude de l'inégalité $a > g_p$, ou plutôt celle de la relation $a_n > b a_{n+1} + a_{n+2}$, d'où elle est déduite.

Lorsque le quotient de a_n par a_{n+1} surpasse b, cette relation est évidente.

Si ce quotient est précisément égal à b, il peut arriver que le diviseur employé soit $\mathrm{R}_1 = a_{n+1}$. Alors on a le même reste en prenant pour dividende R ou $\mathrm{R} + \mathrm{R}_1 = a_n$, et ce reste, s'il n'est pas a_{n+2}, est plus grand que cette quantité; il n'y a donc lieu à examiner la question qu'autant que le quotient égale b et le diviseur diffère de R_1.

Dans cette hypothèse, soit d'abord

$$b = 3.$$

Le diviseur est $\mathrm{R} - \mathrm{R}_1 = a_{n+1}$ et le dividende est R_1; le quotient est plus petit que 2, puisque $a_n > 2\mathrm{R}_1$ donne un quotient < 4, et l'on a

$$\mathrm{R}_1 = (\mathrm{R} - \mathrm{R}_1) + (2\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}), \quad \mathrm{R} + \mathrm{R}_1 = 3(\mathrm{R} - \mathrm{R}_1) + 2(2\mathrm{R}_1 - \mathrm{R}).$$

On voit que $2R_1 - R$ égale ou surpasse a_{n+2}; ainsi on peut affirmer que

$$a_n \overset{=}{>} 3a_{n+1} + 2a_{n+2} > 3a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Soit maintenant

$$b = 4.$$

Le dividende est R_1, le diviseur est $R - R_1$, $R - 2R_1$ ou $2R_1 - R$; de là trois cas à distinguer :

Premier cas. Le quotient ne peut atteindre le nombre 2; car, a_n ne contenant par cinq fois a_{n+1}, on a

$$R + R_1 < 5(R - R_1),$$

d'où l'on tire

$$R_1 < 2(R - R_1);$$

on peut donc écrire

$$R_1 = (R - R_1) + (2R_1 - R),$$

et a_{n+2} se trouve être la plus petite des quantités

$$2R_1 - R, \quad (R - R_1) - (2R_1 - R) = 2R - 3R_1,$$
$$(2R_1 - R) - (2R - 3R_1) = 5R_1 - 3R, \quad \text{etc.}$$

D'ailleurs, en divisant $a_n = R + R_1$ par $a_{n+1} = R - R_1$, on obtient

$$R + R_1 = 4(R - R_1) + (5R_1 - 3R).$$

$5R_1 - 3R$ étant l'une des quantités dont la plus petite est a_{n+2}, on conclut de cette inégalité ce qui est en question.

Deuxième cas. $R_1 = (R - 2R_1) + (3R_1 - R)$,

$$R + R_1 = 4(R - 2R_1) + 3(3R_1 - R),$$

et l'on voit que

$$a_n \overset{=}{<} 4a_{n+1} + 3a_{n+2} > 4a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Quant au quotient de R_1, il a bien l'unité pour partie entière, car

$$R + R_1 < 5(R - 2R_1) \quad \text{donne} \quad R_1 < \tfrac{4}{3}(R - 2R_1).$$

Troisième cas. $R + R_1 < 5(2R_1 - R)$ donne $R - R_1 < 2R_1 - R$.

Ainsi, dans l'hypothèse, ce cas ne peut se présenter, le diviseur ne peut être $2R_1 - R$, puisqu'il en existe un plus petit qu'on aura dû prendre.

Lorsque $b = 5$, le dividende est toujours R_1, le diviseur peut être

$$R - R_1, \quad R - 2R_1, \quad 2R_1 - R, \quad R - 3R_1, \quad 3R_1 - R.$$

Premier cas. $R + R_1 \begin{matrix} > 5(R - R_1) \\ < 6(R - R_1) \end{matrix}$ donne $R_1 \begin{matrix} > 2(R - R_1) \\ < 2\frac{1}{2}(R - R_1) \end{matrix}$,

et, par suite, on a

$$R_1 = 2(R - R_1) + (3R_1 - 2R);$$

mais on a aussi

$$R + R_1 = 5(R - R_1) + 2(3R_1 - 2R),$$

et l'on en conclut

$$a_n \underset{>}{=} 5a_{n+1} + 2a_{n+2} > 5a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Deuxième cas. $R + R_1 < 6(R - 2R_1)$ donne $R - 2R_1 > 3R_1 - R$;

ce cas ne peut donc se présenter, le diviseur choisi ne peut être $R - 2R_1$ dans l'hypothèse.

Troisième cas. $R + R_1 \begin{matrix} > 5(2R_1 - R) \\ < 6(2R_1 - R) \end{matrix}$ donne $R_1 \begin{matrix} > 2(2R_1 - R) \\ < \frac{7}{3}(2R_1 - R) \end{matrix}$;

le quotient a pour partie entière 2 : ainsi

$$R_1 = 2(2R_1 - R) + (2R - 3R_1);$$

d'ailleurs

$$R + R_1 = 5(2R_1 - R) + 3(2R - 3R_1),$$

et l'on voit que

$$a_n \underset{>}{=} 5a_{n+1} + 3a_{n+2} > 5a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Quatrième cas. $R + R_1 < 6(R - 3R_1)$ donne $R_1 < \frac{5}{4}(R - 3R_1)$,

le quotient entier est 1, et l'on a

$$R_1 = (R - 3R_1) + (4R_1 - R), \quad R + R_1 = 5(R - 3R_1) + 4(4R_1 - R);$$

d'où

$$a_n \underset{>}{=} 5a_{n+1} + 4a_{n+2} > 5a_{n+1} + a_{n+2}.$$

Cinquième cas. $R+R_1 < 6(3R_1 - R)$ donne $3R_1 - R > R - 2R_1$; ainsi ce cas ne peut se présenter dans l'hypothèse ; on doit prendre un autre diviseur que $3R_1 - R$, puisqu'il en existe au moins un plus petit parmi les quantités entre lesquelles on a dû prendre la plus petite.

Lorsqu'on veut bien se borner à des limites un peu moins approchées, on peut, surtout au delà de $b = 3$, employer la démonstration beaucoup plus simple donnée par M. Binet. On a évidemment

$$a > ba_1, \quad a_1 > ba_2, \ldots, \quad a_{p-1} > ba_p;$$

ou bien

$$a > ba_1 > b^2 a_2 \ldots > b^p a_p > b^p,$$

et, par suite,

$$p \log b < \log a,$$

d'où

$$p < \frac{1}{\log b}\,\alpha,$$

ce qui donne

$$\text{pour } b = 4, \quad p < 1{,}661\,\alpha < \tfrac{5}{3}\alpha;$$
$$\text{pour } b = 5, \quad p < 1{,}4307\,\alpha < \tfrac{3}{2}\alpha.$$

Dans le cas où il existe n_2 quotients à deux chiffres, n_3 quotients à 3 chiffres, etc., on arrive de la même manière à

$$a > b^{p-n_2-n_3\ldots}.10^{n_2}.100^{n_3}\ldots,$$

d'où l'on tire

$$(p - n_2 - n_3 \ldots) \log b + n_2 + 2n_3 + \ldots < \alpha,$$

et

$$\left.\begin{array}{l} (p + n_2 + 2n_3 + \ldots) \log b \\ \quad + n_2 (1 - 2\log b) \\ \quad + n_3 (2 - 3\log b) \\ \quad + \ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} < \alpha.$$

Cette inégalité peut être réduite à

$$p + n_2 + 2n_3 + \ldots = P < \alpha,$$

lorsqu'on a $1 > 2 \log b$, ce qui entraîne $2 > 3 \log b$, etc. Or, cette relation exige que b qui est entier soit au plus 3, et ne permet pas, par conséquent, d'affirmer que les deux dernières limites sont applicables aux divisions partielles, comme on pourrait le dire de la limite obtenue de la même manière pour $b = 3$ et qui est $p < 2{,}096\alpha$.

Enfin, je terminerai en faisant remarquer que, quand on peut consulter un tableau des g, on obtient une limite par sa seule inspection, pourvu qu'on se rappelle l'inégalité $a > g_p$; cette limite est même fréquemment préférable à celles qui sont exprimées en fonction de α. Par exemple, si nous nous reportons à la première section, nous verrons que, a étant compris entre $g_{15} = 1597$ et $g_{16} = 2584$, g_p, qui est plus petit que a, est au plus g_{15}, et qu'il ne peut y avoir, par conséquent, plus de 15 divisions. La limite de M. Lamé en indique au plus 19, et la limite (8), page 43, au plus 18.