JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

M. CHASLES

Sur les lignes géodésiques et les lignes de courbure des surfaces du second degré

Journal de mathématiques pures et appliquées 1re série, tome 11 (1846), p. 5-20.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1846_1_11__5_0>

SUR

LES LIGNES GÉODÉSIQUES ET LES LIGNES DE COURBURE DES SURFACES DU SECOND DEGRÉ;

PAR M. CHASLES.

(Extrait des *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, tome XXII, séances des 12 et 19 janvier 1846.)

A l'occasion de mon Mémoire sur la construction géométrique des amplitudes des fonctions elliptiques [*], M. Liouville a entretenu l'Académie d'une certaine équation qui, intégrale première de l'équation différentielle du second ordre des lignes géodésiques tracées sur les surfaces du second degré, exprime, sous forme finie, une belle pro-

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIX, p. 1239, séance du 9 décembre 1844. — Dans ce Mémoire, qui contient plusieurs constructions géométriques de l'équation des trois amplitudes $\cos\varphi \cos\varphi' \mp \sin\varphi \sin\varphi' \sqrt{1 - c^2 \sin^2\mu} = \cos\mu$, j'ai dit qu'il s'en trouvait une qui réalisait l'extension que laissait à désirer la construction donnée par M. Jacobi pour la *multiplication* des fonctions, au moyen d'une portion de polygone inscrite à un premier cercle et circonscrite à un second déterminé convenablement. Je ne connaissais le Mémoire de M. Jacobi que par le troisième supplément au *Traité des fonctions elliptiques* de M. Legendre, et le *Traité élémentaire des fonctions elliptiques* de M. Verhulst (Bruxelles, 1841, in-8°), où cette construction semble être reproduite intégralement, sans qu'aucun indice fasse soupçonner que l'illustre géomètre de Kœnigsberg ait construit l'équation générale des trois amplitudes. Je n'aurais pas imaginé que M. Legendre surtout, qui reproduisait et commentait avec éloge cette construction, et indiquait quelques vues d'analogie avec le théorème de Côtes, l'eût tronquée et restreinte dans ses usages et ses conséquences théoriques. J'ai connu depuis l'erreur où j'avais été induit, et je saisis ici avec empressement l'occasion de la signaler. Le beau Mémoire de M. Jacobi, traduit par le savant M. Terquem, vient de paraître dans le *Journal de Mathématiques* de M. Liouville, t. X, p. 435.

priété de ces lignes. L'importance de ce résultat avait fait désirer à l'auteur que l'on pût y parvenir par de simples considérations de Géométrie [*]. Cette voie simple et naturelle, en effet, qui oblige de considérer les choses en elles-mêmes, en montre mieux que le calcul seul l'origine et les rapports avec nos vérités primordiales, et fait connaître, en général, un enchaînement de propositions dont une partie a pu échapper à l'analyste dans sa marche rapide.

Il semble donc, qu'on me permette ici cette réflexion fort naturelle, il semble que plus l'analyse fait de progrès et étend son domaine, plus la synthèse aurait besoin d'être cultivée et de se perfectionner aussi, pour lui prêter son utile secours. Et cependant, le contraire a lieu depuis un siècle et demi : il semble que l'analyse, confiante dans ses propres forces, n'ait voulu aucun partage avec une méthode qui, après avoir été le seul instrument des Archimède, des Apollonius, des Ptolémée, a su encore, chez les Modernes, donner naissance aux travaux de Képler, de Galilée, d'Huygens et de Newton. La synthèse a été exclue successivement de tout enseignement. C'est, je crois, une erreur du siècle dernier, et qui pourra étonner ceux qui feront l'histoire des sciences de cette époque.

Mais je reviens au sujet de mon Mémoire. Les beaux théorèmes de M. Michael Roberts, communiqués par M. Liouville dans l'avant-dernière séance, ayant ramené l'attention de l'Académie sur l'équation de la ligne géodésique, je me suis occupé de ce sujet, dans le but particulièrement de trouver la démonstration géométrique désirée. Mes recherches n'ont pas été infructueuses, et j'ai l'honneur d'en communiquer les résultats à l'Académie.

Je suis parvenu à une proposition qui comprend, comme corollaire, celle qu'il s'agissait de démontrer, et qui donne lieu à plusieurs autres conséquences parmi lesquelles se distingue une propriété nouvelle de la ligne géodésique.

Cette proposition dérive elle-même d'un théorème sur les surfaces dont les sections principales sont décrites des mêmes foyers, surfaces

---

[*] *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. XIX, p. 1261 ; séance du 9 décembre 1844. — *Journal de Mathématiques*, t. IX, p. 404.

que j'appellerai *homofocales*, parce qu'elles ont les mêmes coniques *focales* ou *excentriques*. Voici l'énoncé de ce théorème que je vais prendre pour point de départ :

THÉORÈME. *Étant donnée une surface du second degré* A, *si par un point quelconque de l'espace* M *on mène les normales aux trois surfaces homofocales qui passent par ce point, et qu'on porte sur ces normales trois segments égaux, respectivement, aux trois demi-axes majeurs de ces surfaces, puis qu'on considère ces segments comme les trois demi-axes principaux d'un ellipsoïde; cet ellipsoïde, qui sera complétement déterminé, jouira des propriétés suivantes :*

1°. *Il passera par le centre de la surface* A, *et sera tangent, en ce point, au plan principal normal à l'axe majeur de cette surface;*

2°. *La section de cet ellipsoïde par son plan diamétral parallèle à ce plan principal, sera une ellipse toujours de même grandeur, quelle que soit la position du point* M *dans l'espace.*

La deuxième partie de cette proposition fait reconnaître aisément que :

Les axes principaux de cette ellipse constante sont parallèles à ceux de la focale de la surface A, *comprise dans son plan principal en question, et ces axes ont leurs carrés égaux, au signe près, aux carrés des axes de cette focale* [*].

Les deux parties de ce théorème fondamental se trouvent démontrées, parmi plusieurs propositions sur les surfaces homofocales, dans mon *Aperçu historique* (pages 363 à 365). Ce théorème est susceptible

---

[*] J'ai appelé *coniques focales* ou *excentriques*, d'une surface du second degré, trois coniques (dont une est toujours imaginaire) qui donnent lieu, par rapport à la surface, à une théorie analogue à celle des foyers dans les sections coniques. Ces courbes étaient connues, mais à d'autres titres, ainsi que j'ai eu l'occasion de le dire devant l'Académie (*Comptes rendus*, t. XVI, p. 833 et 1107); et les questions dans lesquelles elles s'étaient présentées n'indiquaient nullement la théorie nouvelle dont elles devaient être le fondement. En exposant, pour la première fois, cette théorie dans mon *Aperçu historique* (pages 384-399), j'ai fait connaître une cinquantaine de théorèmes généraux qui s'y rapportent, et j'ai indiqué plusieurs questions dans lesquelles ces théorèmes trouvent une application étendue. Depuis, on a donné quelques propriétés de ces courbes, relatives à leurs points considérés isolément ou deux à

d'un grand nombre de conséquences, mais je vais me borner ici à la proposition qui se rapporte aux lignes géodésiques.

Que par le point M on mène un plan transversal quelconque L, ou plutôt supposons que le point M soit pris dans un plan donné L. Soient i, i', i'' les angles que les normales aux surfaces homofocales à la surface proposée A, qu'on peut mener par le point M, font avec ce plan; et soient ρ, μ, ν les trois demi-axes majeurs de ces surfaces. Ce sont les trois demi-axes principaux de l'ellipsoïde qui a son centre en M. La somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de ces trois demi-axes sur le plan L est

$$\rho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'';$$

cette somme est égale à celle des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de trois demi-diamètres conjugués de l'ellipsoïde. Prenons pour ces trois demi-diamètres celui qui aboutit au centre de la surface A et les deux axes principaux de l'ellipse du théorème précédent. Ces deux axes, d'après ce théorème, sont toujours les mêmes, en grandeur et en direction, quel que soit le point M; de sorte que les trois perpendiculaires auront, respectivement, les mêmes longueurs, quelle que soit la position du point M dans le plan L. Ainsi l'on a

$$\rho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \text{constante}.$$

Pour déterminer cette constante, remarquons que dans la série des surfaces homofocales à la surface A, il en est une qui touche le plan L; soit α le demi-axe majeur de cette surface; au point où elle

---

deux. Mais on s'est mépris sur le caractère de ces propriétés, en appelant ces points des *foyers conjugués*, et en croyant que les propositions qui s'y rapportent constituent la théorie en question. Je le répète, ce sont les courbes elles-mêmes qui représentent, dans une surface du second degré, chacune individuellement, les foyers d'une conique, et non leurs points, pris isolément ou deux à deux. Il faut qu'en supposant que la surface se réduise à une conique, parce que l'un de ses axes devient nul, les propriétés relatives à ses *focales* deviennent précisément les propriétés des foyers des coniques. C'est à cette condition, je puis dire à ce *criterium*, qu'on reconnaîtra si des propriétés de ces focales sont les analogues de celles des foyers dans les coniques, et constituent la théorie en question.

touche le plan, les deux autres surfaces homofocales qu'on peut faire passer par ce point auront leurs normales comprises dans le plan, de sorte que pour ce point l'équation sera simplement

$$\alpha^2 = \text{constante}.$$

Ainsi la constante est le carré du demi-axe majeur de la surface tangente au plan L. Écrivons donc

$$\rho^2 \sin^2 i + \mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$

Cette équation exprime ce théorème :

THÉORÈME. *Étant donnée une surface du second degré, et un plan étant mené arbitrairement dans l'espace, si en chaque point de ce plan on conçoit les normales aux trois surfaces homofocales à la proposée, qui passent par ce point, et qu'on porte sur ces normales, respectivement, des segments égaux aux demi-axes majeurs des trois surfaces, la somme des carrés des perpendiculaires abaissées des extrémités de ces trois segments, sur le plan, sera constante et égale au carré du demi-axe majeur de la surface homofocale qui serait menée tangentiellement au plan.*

C'est ce théorème qui va nous conduire aux propriétés de la ligne géodésique.

Concevons que le plan L passe par la normale en un point m de la surface A ; en ce point l'angle i est nul, et l'équation se réduit à

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2. \tag{1}$$

i' et i'' sont les angles que les normales aux deux lignes de courbure de la surface, qui se croisent en m, font avec la direction mm' de la trace du plan sur la surface. Cette équation nous apprend donc que :

Étant pris sur une surface du second degré A *un élément infiniment petit* mm' *faisant, avec les normales aux deux lignes de courbure qui se croisent en* m, *des angles* i', i'', *l'expression*

$$(\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'')$$

représente le carré du demi-axe majeur de la surface homofocale à la surface A, *qui serait tangente au plan déterminé par l'élément* mm' *et la normale en* m.

Appliquons au point m' l'équation générale, on aura

$$\rho^2 \sin^2 i_1 + \mu_1^2 \sin^2 i'_1 + \nu_1^2 \sin^2 i''_1 = \alpha^2;$$

i_1 est l'angle que la normale en m' fait avec le plan L, et i'_1, i''_1 sont les angles que les normales aux deux lignes de courbure qui se croisent en m' font avec ce même plan. Or, d'une part, l'angle i_1 est infiniment petit, de sorte que le premier terme de l'équation est un infiniment petit du second ordre, qui disparaît; et l'équation se réduit à

$$\mu_1^2 \sin^2 i'_1 + \nu_1^2 \sin^2 i''_1 = \alpha^2. \tag{2}$$

D'autre part, il n'y a aussi qu'une différence infiniment petite du second ordre entre $\sin i'_1$, $\sin i''_1$ et les sinus des angles que les normales aux lignes de courbure en m' font avec la trace du plan L sur la surface, c'est-à-dire avec l'élément $m'm$, parce que ce plan diffère infiniment peu du plan normal en m'. Nous supposerons donc que i'_1, i''_1 représentent ces angles eux-mêmes dans notre équation (2).

Il suit de là, d'après le théorème conclu de l'équation (1), que le premier membre de l'équation (2) représente le carré du demi-axe majeur de la surface homofocale qui serait tangente au plan normal en m, mené par l'élément $m'm$. Donc, d'après cette équation (2), cette surface est la même que celle à laquelle est tangent le plan normal en m. On a donc ce théorème :

Si par un élément rectiligne m m', *pris sur une surface du second degré, on mène les deux plans normaux à la surface en* m *et* m', *respectivement, ces deux plans seront tangents à une même surface homofocale à la proposée.*

On conclut immédiatement de là cette première propriété des lignes géodésiques :

Les plans osculateurs aux différents points d'une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré sont tous tangents à une autre surface du second degré homofocale à la première.

Il suit de là que l'équation (1) s'applique, avec la même constante α, à tous les points de la ligne géodésique; d'où résulte cette seconde propriété :

i' *et* i'' *étant les angles que la ligne géodésique fait en chacun* *de ses points avec les normales aux deux lignes de courbure de la surface en ce point, et* μ, ν *étant les paramètres de ces deux lignes de courbure (c'est-à-dire les demi-axes majeurs des deux surfaces homofocales sur lesquelles elles se trouvent), on a la relation constante*

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2,$$

dans laquelle α *est le demi-axe majeur de la surface homofocale à laquelle tous les plans osculateurs de la ligne géodésique sont tangents* [*].

Voilà donc la démonstration de l'équation des lignes géodésiques, et cette démonstration, comme on voit, fait connaître une expression géométrique de la constante, qui constitue une propriété importante des lignes géodésiques.

Puisque tous les plans osculateurs de la ligne géodésique sont tangents à une même surface homofocale à la proposée, leurs intersections successives sont des droites tangentes elles-mêmes à cette surface; or, ces intersections sont les tangentes à la ligne géodésique; on peut donc dire que :

Toutes les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré sont tangentes à une seconde surface homofocale à la première.

Leurs points de contact, sur cette surface, forment une courbe dont nous ferons connaître plus loin une propriété générale.

Cette surface rencontre la surface proposée A suivant une ligne de courbure. Au point où la ligne géodésique rencontre cette ligne, sa tangente est nécessairement la tangente à la ligne de courbure, car c'est là la seule droite tangente à la seconde surface. Donc, *toutes les lignes géodésiques répondant à une même constante* α *sont tangentes à une même ligne de courbure.* De sorte que la ligne de courbure est l'enveloppe de toutes les lignes géodésiques; et la propriété commune

---

[*] Cette équation s'applique à une ligne droite tracée dans le plan d'une série de coniques, ellipses et hyperboles, décrites des mêmes foyers. L'une de ces courbes peut être considérée comme une surface infiniment aplatie, dont les autres courbes sont les lignes de courbure.

à ces lignes et à leur enveloppe, c'est que *leurs tangentes sont toutes tangentes à une même surface homofocale à la proposée* [*].

Cela donne une construction très-simple pour déterminer, en chaque point d'une surface, la direction des deux lignes géodésiques qui iront toucher une ligne de courbure donnée.

On conclut de ces considérations, en particulier, que : *Toutes les tangentes à une ligne géodésique issue d'un ombilic vont percer le plan diamétral dans lequel sont situés les ombilics, en des points situés sur la conique focale comprise dans ce plan.*

M. Joachimsthal a démontré la proposition suivante, commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure :

P *étant la perpendiculaire abaissée du centre de la surface sur son plan tangent en un point d'une ligne géodésique, et* D *le demi-diamètre de la surface parallèle à la tangente à cette courbe en ce point, on a*

$$\mathrm{PD} = \textit{constante};$$

Et une équation semblable a lieu aussi pour toutes les tangentes à une ligne de courbure [**].

M. Liouville a fait observer que l'équation

$$\mathrm{PD} = \text{constante}$$

des lignes géodésiques revient à l'équation

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \text{constante},$$

c'est-à-dire que l'une comporte l'autre. En effet, on passe de l'une à l'autre par un calcul analytique, comme l'a fait depuis M. Ghelini [***].

Notre théorème général sur les surfaces homofocales se prête aussi

---

[*] Les arcs de ces courbes compris entre deux points de contact consécutifs sur la ligne de courbure enveloppe sont tous de même longueur, non-seulement pour une même ligne géodésique, mais pour toutes les lignes géodésiques tangentes à la même ligne de courbure.

[**] *Journal de Mathématiques* de M. Crelle; t. XXVI; 1843.

[***] *Sulla curvatura delle linee e delle superficie e sulle linee geodesiche.*

à cette transformation; car, par les propriétés de cette ellipse constante dont il a été question, on est conduit aisément au théorème suivant :

Si en un point m *d'une surface du second degré on mène une tangente faisant, avec les normales aux deux lignes de courbure en ce point, des angles* i', i'', *on aura la relation*

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = a^2 - \frac{a^2 b^2 c^2}{P^2 D^2},$$

dans laquelle a, b, c *sont les trois demi-axes de la surface;* D *son demi-diamètre parallèle à la tangente,* P *la perpendiculaire abaissée du centre sur le plan tangent à la surface en* m, *et enfin* μ *et* ν *les paramètres des deux lignes de courbure qui se croisent en ce point.*

Ce théorème, qui exprime une propriété générale des surfaces du second degré, comprend l'équation

$$PD = \text{constante},$$

commune aux lignes géodésiques et aux lignes de courbure.

Si maintenant on remplace le premier membre de l'équation par son expression géométrique trouvée précédemment, il vient

$$P^2 D^2 = \frac{a^2 b^2 c^2}{a^2 - \alpha^2}.$$

Ce qui exprime cette autre propriété remarquable des surfaces homofocales :

Pour toute tangente commune à deux surfaces homofocales (d'espèce différente), on a, relativement à chaque surface, l'équation

$$PD = \textit{constante}.$$

De là on conclut que :

La courbe, que les tangentes à une ligne géodésique forment par leurs points de contact sur la seconde surface, admet les mêmes équations que la ligne géodésique, savoir :

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \textit{constante} \quad \text{et} \quad PD = \textit{constante},$$

D et les angles i', i'' se rapportant, non plus à la tangente à la courbe, mais à sa tangente conjuguée.

En effet, ces tangentes conjuguées sont les tangentes mêmes de la ligne géodésique, de sorte qu'elles sont tangentes à la première surface. Donc, pour chacune de ces tangentes, les deux équations ont lieu.

Voici une autre propriété des lignes géodésiques, qui dérive naturellement des considérations précédentes. Concevons la surface développable circonscrite à une surface du second degré suivant une ligne géodésique. Chaque point de l'arête de rebroussement de cette surface sera le sommet d'un cône dont la courbe de contact avec la surface passera par trois points consécutifs de la ligne géodésique; c'est-à-dire que cette courbe de contact sera dans le plan osculateur de la ligne géodésique. Or, ce plan osculateur est tangent à une même surface du second degré; donc le lieu des sommets des cônes est une troisième surface du second degré, qui sera la polaire de la deuxième par rapport à la première. On peut donc dire que :

La surface développable circonscrite à une surface du second degré suivant une ligne géodésique a son arête de rebroussement située sur une autre surface du second degré ;

Et cette seconde surface est la même pour toutes les lignes géodésiques tangentes à une même ligne de courbure.

La propriété de la ligne géodésique, que ses tangentes sont toutes tangentes à une seconde surface du second degré, peut se démontrer directement.

En effet, concevons sur une surface A deux éléments consécutifs mm', $m'm''$ d'une ligne géodésique. Il existe une surface B homofocale à la surface A, qui touche en un point n la tangente mm', et il n'en existe qu'une [*]. Le plan tangent en n à cette surface et le plan tangent en m à la surface A sont à angle droit [**]. Or, le plan des deux éléments

---

[*] En effet, une des propriétés les plus importantes des surfaces homofocales, c'est qu'on peut les considérer comme étant toutes inscrites dans une même surface développable. (*Aperçu*, page 397). Il s'ensuit que les polaires d'une même droite, prises par rapport à ces surfaces, forment un hyperboloïde à une nappe. Cet hyperboloïde rencontre la droite en deux points, qui sont les points de contact de cette droite avec deux des surfaces.

[**] *Aperçu historique*, page 392; art. 33.

mm', $m'm''$ est normal à la surface A; donc ce plan est lui-même le plan tangent en n à la surface B. Donc la droite $m'm''$, comprise dans ce plan et infiniment voisine de la tangente en n, est elle-même tangente à la surface B. Ainsi, deux tangentes consécutives à la ligne géodésique sont tangentes à la même surface B. Donc une troisième tangente $m'm''$ sera tangente à cette même surface; et ainsi des autres. Le théorème est donc démontré.

Description des lignes de courbure de même espèce, l'une par l'autre.

Si d'un point d'une ligne de courbure on mène les deux lignes géodésiques tangentes à une deuxième ligne de courbure de même espèce, la somme de ces deux lignes moins l'arc qu'elles interceptent sur la deuxième courbe est une quantité constante; propriété analogue à celle des coniques planes et sphériques. On conclut de là cette construction mécanique des lignes de courbure, qui a lieu aussi pour les coniques : *Que l'on conçoive un fil enroulé à ses deux extrémités sur une ligne de courbure, et qu'un stylet glisse sur la surface en tendant le fil, de manière qu'il s'enroule d'un côté et se déroule de l'autre, le stylet décrira une seconde ligne de courbure de même espèce que la première.* Car la relation énoncée aura lieu, savoir : que la somme des deux lignes géodésiques issues du stylet, et terminées à leurs points de contact avec la ligne de courbure, moins l'arc qu'elles comprennent, sera constante.

Si la ligne de courbure est l'arc d'ellipse principale qui se termine aux deux ombilics, ce mode de description devient celui de M. Michael Roberts, analogue à la description de l'ellipse au moyen d'un fil fixé à ses foyers.

Théorème général sur la description des lignes de courbure des surfaces du second degré. (Séance du 19 janvier 1846.)

Toutes les tangentes à une ligne géodésique tracée sur une surface du second degré vont toucher une seconde surface du second degré homofocale à la première. Cette propriété caractéristique, qu'on peut regarder comme la cause géométrique des deux équations de MM. Joachimsthal et Liouville, conduit à un théorème fort curieux qui constitue un procédé mécanique de description des lignes de courbure d'une surface du second degré, par un fil tendu tout à la fois sur cette surface et sur son homofocale. Voici l'énoncé de ce théorème :

Étant données deux surfaces du second degré homofocales (d'espèce différente, pour que l'une ne soit pas comprise entièrement dans l'autre), si un fil a ses extrémités fixées en deux points de la seconde surface, et qu'un stylet qui glisse sur la première tende le fil de manière qu'il s'applique librement sur les deux surfaces, c'est-à-dire qu'il s'applique sur la seconde à partir de ses deux extrémités, qu'ensuite il devienne rectiligne, puis qu'il se courbe suivant deux lignes géodésiques de la première surface, le stylet décrira une ligne de courbure de cette surface, quelle que soit la longueur du fil, et quels que soient les deux points de la seconde surface où sont fixées ses extrémités.

Démonstration. Appelons A la surface sur laquelle glisse le stylet, et B celle sur laquelle sont fixées les extrémités du fil, en deux points P, P′. A partir du point P, le fil s'applique sur la surface B suivant une ligne géodésique. Les tangentes aux différents points m, m',... de cette ligne sont toutes tangentes à la surface A en des points n, n',...; elles sont les directions que prend le brin du fil fixé en P, pour venir s'appliquer sur cette surface A, quand le stylet le tend. Elles forment donc une surface développable tangente à la surface A. Considérons ces deux surfaces comme le prolongement l'une de l'autre à partir de leur courbe de contact $nn'n''$...; elles formeront une nappe continue, puisqu'elles se raccordent suivant cette courbe. J'appellerai cette nappe la *surface composée*. Le fil tendu par le stylet sera, dans chacune de ses positions, une ligne géodésique sur cette surface. En effet, sa partie comprise sur A, entre le point n et le stylet s, est une ligne géodésique : sa partie comprise de n en m est aussi une ligne géodésique, puisqu'elle est droite; il y a donc simplement à prouver que le plan des deux premiers éléments du fil, de part et d'autre du point n, lequel est le plan osculateur de la ligne mixtiligne formée par le fil, est normal à notre surface. Or, cela a lieu, car ce plan comprend deux tangentes à la surface B : l'une est le fil rectiligne nm, et l'autre est dirigée suivant le premier élément curviligne à partir du point n. Or, les deux tangentes considérées ici sont infiniment voisines; elles déterminent donc le plan tangent à la surface B en son point m. Mais ce plan est normal au plan tangent à la surface A en son point n, puisque la droite mn est une tangente commune aux deux surfaces [*]. Il est donc démontré que le plan osculateur en n à la ligne mixtiligne formée par le fil, est normal à la surface A, et conséquemment à notre surface composée. Il s'ensuit que le fil forme sur cette surface une ligne géodésique.

Cela admis, soient s, s' deux positions infiniment voisines du stylet; et smP, $s'm'$P les deux positions du brin fixé en P, m et m' étant les points où la partie rectiligne du fil touche, dans ces deux positions, la surface B. La ligne mm'P est une ligne géodésique dont mm' est un élément; de sorte que m est un point commun aux deux fils P$m'ms$, P$m'ms'$. Ces deux fils formant sur la surface *composée* deux lignes géodésiques, leur différence, d'après le théorème connu de M. Gauss, est égale à la projection de l'élément ss' sur la direction du premier. Pareillement, la différence des deux autres brins, qui aboutissent au point P', est égale à la projection du même élément ss' sur le fil sP'. Or, cette différence est égale à la première, puisque le fil PsP' est de longueur constante; donc les projections de l'élément ss' sur les deux brins sP, sP' sont égales; donc ces deux fils sP, sP' font des angles égaux avec l'élément ss'. Or, ces deux fils sont courbés suivant des lignes géodésiques dont les tangentes touchent toutes la surface B; de sorte que les tangentes en s à ces deux lignes sont les tangentes à la surface B comprises dans le plan tangent à la surface A au point s: en d'autres termes, si l'on conçoit le cône circonscrit à la surface B et ayant son sommet en s, les deux tangentes en question seront les deux arêtes de ce cône comprises dans le plan tangent à la surface A. Mais ce plan tangent est un plan principal du cône [**]; donc les deux tangentes font des angles égaux avec l'un des deux axes principaux du cône compris dans ce plan; or, ces deux axes sont les tangentes aux lignes de courbure de la surface qui se croisent au point s [***]; donc chacune de ces

[*] *Aperçu historique*, p. 392; art. 33.

[**] *Aperçu historique*, p. 392; art. 32.

[***] *Ibid.*

lignes fait des angles égaux avec les deux fils sP, sP'; donc l'élément ss' appartient à l'une de ces lignes; ce qui démontre le théorème.

Observations. — Nous aurions encore pu dire que les deux lignes géodésiques sP, sP' font des angles égaux avec chacune des deux lignes de courbure en s, *parce que leur équation admet la même constante.* Mais, par les considérations que nous venons d'employer, il n'est pas nécessaire de connaître les équations des lignes géodésiques; de sorte que notre théorème dérive directement et exclusivement de cette propriété purement géométrique de la ligne géodésique, savoir, que toutes ses tangentes touchent une seconde surface homofocale à la première.

J'ai dit que les deux points P, P' pouvaient être pris arbitrairement sur la surface B. En effet, les deux brins du fil tendu par un stylet situé en s ne peuvent prendre sur la surface A, que les directions des deux lignes géodésiques qui passent par ce point. Mais la démonstration suppose, toutefois, que l'un des points étant pris arbitrairement, le second le soit de manière que les deux brins du fil ne forment pas sur la surface A la même ligne géodésique. La surface B se partagera en deux régions : l'une sera le lieu des points P tels, que le brin fixé en l'un de ces points viendra toujours s'appliquer sur la surface A suivant la même ligne géodésique, et l'autre, le lieu des points P' du second brin qui s'appliquera toujours sur A suivant la seconde ligne géodésique. Si les deux extrémités du fil étaient fixées en des points de la même région, les deux brins se courberaient donc sur la surface A suivant la même ligne. Cependant il y a encore à considérer que le fil, à partir d'un même point P, peut se diriger suivant deux directions opposées; ce qui pourra permettre de prendre les deux points P, P' dans la même région.

C'est un fait assez curieux, qu'un fil étant fixé en un point s d'une surface A, si l'on fait glisser son autre extrémité P sur une seconde surface homofocale B, de manière qu'il soit courbé sur les deux surfaces à la fois, il ne cesse pas d'être tangent à une même ligne de la surface A.

Conséquences du théorème général. — Concevons un ellipsoïde A et un hyperboloïde B; le fil peut être fixé en deux points de la courbe d'intersection des deux surfaces et enroulé en partie sur cette courbe; on décrit alors une ligne de courbure de la surface A, à la manière que j'ai déjà indiquée directement.

L'ellipsoïde peut devenir infiniment aplati et se réduire à l'ellipse *focale* ou *excentrique* de l'hyperboloïde. On en conclut que *cette ellipse peut être décrite par un stylet qui tend un fil dont les extrémités sont fixées en deux points de l'hyperboloïde*, pourvu qu'à ses extrémités le fil soit courbé sur l'hyperboloïde.

Supposons que l'hyperboloïde soit à une nappe, et que l'un de ses axes réels devienne nul; cette surface deviendra l'hyperbole lieu des ombilics des ellipsoïdes homofocaux. On en conclut que : *Avec un fil dont les extrémités sont fixées en deux points pris respectivement sur les deux branches d'une hyperbole, on peut décrire des lignes de courbure d'un ellipsoïde qui aurait cette hyperbole pour focale.*

Si les deux points pris sur l'hyperbole sont les ombilics de l'ellipsoïde, on retombe sur le théorème de M. Michael Roberts.

L'ellipsoïde pouvant s'aplatir indéfiniment et devenir l'ellipse *focale*, on en conclut que cette ellipse sera décrite avec un fil fixé aux deux branches de l'hyperbole. C'est le théorème de M. Ch. Dupin.

Ajoutons que les deux points où sont fixées les deux extrémités du fil, au lieu d'être sur l'hyperbole, ce qui satisfait à la condition que les deux brins du fil soient tangents à la surface B que l'hyperbole représente, peuvent être placés en deux autres points du plan de cette courbe, pourvu que les deux brins s'appuient sur son périmètre.

Le stylet pourra décrire d'autres ellipses de mêmes foyers que l'ellipse focale. Pour cela, il faudra que le fil soit d'une plus grande longueur que pour décrire celle-ci, et qu'en s'appuyant sur le périmètre de cette ellipse focale, il passe sous son plan, et que le stylet le tende et imprime sa trace sur la face inférieure du plan. On décrira, de la sorte, des ellipses de toutes grandeurs, mais toutes homofocales.

Si d'un point P de l'hyperbole focale d'un ellipsoïde, on mène une tangente à cette surface, et qu'on la prolonge par une ligne géodésique, cette ligne passera toujours par le même ombilic O; de sorte qu'on pourra tendre du point P au point O une infinité de fils mixtilignes; *tous ces fils seront égaux entre eux.* Et comme les lignes géodésiques vont passer par l'ombilic opposé, et qu'elles sont égales entre elles, il s'ensuit que : *Si d'un point* P *pris sur l'hyperbole focale d'un ellipsoïde, on mène une tangente à cette surface, cette tangente, moins* *l'arc géodésique mené du point de contact à l'ombilic situé sur la même branche du côté du point* P, *forme une longueur constante.*

On conclut de là que :

Quand deux ellipsoïdes sont inscrits dans un cône de révolution qu'ils touchent suivant une même courbe, les arcs géodésiques menés d'un point quelconque de cette courbe aux deux ombilics situés sur les deux calottes elliptiques, ont leur différence constante.

La courbe de contact sur le cône peut être considérée comme le contour d'un ellipsoïde infiniment aplati dont les ombilics sont les foyers. Donc

Quand un cône de révolution est circonscrit à un ellipsoïde, l'arc géodésique mené d'un point de la courbe de contact à un ombilic, et le rayon vecteur mené du même point à un foyer de cette courbe, ont leur différence constante.

Un cône du second degré et une sphère qui a son centre en son sommet, peuvent être considérés comme deux surfaces homofocales ; donc *les tangentes à une ligne géodésique tracée sur un cône du second degré sont toutes tangentes à une sphère qui a son centre au sommet du cône.* Cela est évident et ne sert ici que comme vérification du théorème général.

Je donnerai, dans une prochaine communication, une démonstration directe de l'équation

$$\mathrm{PD} = \frac{abc}{\sqrt{a^2 - \alpha^2}}$$

relative à toutes les tangentes communes à deux surfaces homofocales, équation que j'ai déduite précédemment de la formule

$$\mu^2 \sin^2 i' + \nu^2 \sin^2 i'' = \alpha^2.$$