JOURNAL
DE
MATHÉMATIQUES
PURES ET APPLIQUÉES
FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874
PAR JOSEPH LIOUVILLE

CAMILLE JORDAN

Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe

Journal de mathématiques pures et appliquées 3e série, tome 1 (1875), p. 7-42.
<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1875_3_1__7_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

Sur la stabilité de l'équilibre d'un solide pesant posé sur un appui courbe;

PAR M. CAMILLE **JORDAN**.

Les conditions de stabilité établies dans ce Mémoire sont les suivantes :

1° *Le centre de gravité du corps mobile* C′ *doit être situé au-dessous des centres de courbure de la surface extérieure* S′;

2° *Les courbures minimum et maximum* A′ *et* B′ *de la surface* S′ *doivent être respectivement de même signe que les courbures minimum et maximum* A *et* B *de la surface de l'appui.*

Nous prouvons dans la Section I que ces conditions sont suffisantes, en établissant que, si elles sont satisfaites, le centre de gravité de C′ ne peut s'abaisser.

Cette démonstration présente cette particularité, qu'elle exige la considération des infiniment petits du quatrième ordre, dans le cas où $A' < B$. Au contraire, on peut s'arrêter au second ordre si $A' > B$.

Ces deux cas se distinguent d'ailleurs, au point de vue mécanique, par une différence essentielle. Si $A' > B$, le solide pourra pivoter sur son appui avec une liberté complète. Dans le second cas, au contraire, il existe un azimut que sa rotation ne saurait franchir sans qu'il pénétrât dans l'appui.

Dans la Section II, nous établissons les équations qui régissent les oscillations du solide, supposées infiniment petites. Ces équations sont linéaires. Leurs coefficients sont des fonctions périodiques du temps, variant avec une extrême lenteur. Nous démontrons que, en se renfermant dans les limites de temps où cette variation des coefficients peut être négligée, l'amplitude des oscillations croîtrait au delà de toute limite, si les deux conditions ci-dessus n'étaient pas remplies. Elles sont donc nécessaires à la stabilité.

Ces conditions étant supposées satisfaites, les équations à coefficients périodiques, dont nous venons de parler, régiront le phénomène des petites oscillations pendant toute la durée du mouvement, si $A' > B$. Au contraire, si $A' < B$, on pourra distinguer trois périodes successives de mouvement, régies par des équations de forme différente.

Nous terminons en montrant que le problème des petites oscillations peut être ramené à des équations linéaires à coefficients constants, et, par suite, intégré complétement dans les deux cas suivants :

1° Si l'appui est de révolution;

2° Si le solide mobile est de révolution (par sa constitution intérieure, comme par sa surface extérieure).

ANALYSE.

I.

1. Soit C' un solide pesant mobile, reposant par un de ses points O sur un appui fixe C. Pour qu'il soit en équilibre, il sera nécessaire et suffisant que le plan tangent commun aux deux solides soit horizontal, et que le point G, centre de gravité de C', soit situé sur la verticale du point O.

Soient respectivement S et S' les surfaces qui limitent les corps C et C'. Nous prendrons pour centre des coordonnées le point O; pour axe des z la verticale ascendante OZ; pour axes des x et des y les tangentes OX, OY aux sections normales à la surface S, dont les courbures sont minimum et maximum. En désignant par A et B ces deux courbures, l'équation de la surface S dans les environs du point O se réduira sensiblement à

$$(1)\qquad 2z = Ax^2 + By^2.$$

Soient de même OX′, OY′ les tangentes aux sections normales de courbure minimum et maximum dans la surface S′; si l'on désigne par A′ et B′ ces deux courbures, et par φ l'angle de OX′ avec OX, l'équation de la surface S′ dans les environs du point O se réduira sensiblement à

$$(2)\qquad 2z = A'(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + B'(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2.$$

D'ailleurs C′ doit reposer sur C sans le pénétrer. Donc l'ordonnée de S′ doit être partout au moins égale à celle de S. Comparant en particulier les ordonnées qui correspondent à $x = 0$, il viendra

$$B \overline{\overline{<}} A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi$$

ou, comme on a, par hypothèse, $A' \overline{\overline{<}} B'$,

$$B \overline{\overline{<}} B'(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \overline{\overline{<}} B'.$$

Posons, d'autre part, $x = \rho\cos\varphi$, $y = \rho\sin\varphi$ et comparons les ordonnées correspondantes; il viendra

$$A' \overline{\overline{>}} A\cos^2\varphi + B\sin^2\varphi \overline{\overline{>}} A(\sin^2\varphi + \cos^2\varphi) \overline{\overline{>}} A.$$

On aura donc les deux conditions suivantes :

$$(3)\qquad A' \overline{\overline{>}} A,\quad B' \overline{\overline{>}} B.$$

Si ces deux conditions sont satisfaites, on pourra effectivement poser C′ sur C sans que ces deux corps se pénètrent. En effet, orientons C′ de telle sorte qu'on ait $\varphi = 0$; l'équation de S′ deviendra

$$2z = A'x^2 + B'y^2,$$

et la différence entre les ordonnées correspondantes de S′ et de S sera

$$(A' - A)x^2 + (B' - B)y^2,$$

quantité qui ne saurait être négative.

2. Ici deux cas seront à distinguer :

1° Si $A' > B$, on pourra faire pivoter S′ d'un angle quelconque φ autour de la verticale OZ sans que la pénétration se produise; car donnons à φ une valeur quelconque et faisons passer par OZ un plan quelconque : il coupera S suivant une ligne L dont la courbure sera au plus égale à B, et S′ suivant une ligne L′ dont la courbure sera au moins égale à A. Donc la ligne L′, ayant une plus grande courbure que L, sera située au-dessus de cette dernière.

3. 2° Au contraire, si $A' < B$, l'angle φ ne pourra dépasser une limite que nous allons déterminer :

La différence des ordonnées des deux surfaces S′ et S est égale à

$$(4) \left\{ \begin{aligned} & A'(x\cos\varphi + y\sin\varphi)^2 + B'(-x\sin\varphi + y\cos\varphi)^2 - Ax^2 - By^2 \\ & \quad = (A'\cos^2\varphi + B'\sin^2\varphi - A)x^2 + 2(A' - B')\sin\varphi\cos\varphi\, xy \\ & \qquad + (A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi - B)y^2, \end{aligned} \right.$$

expression qui doit être $\overline{\gtrless}\ 0$, quel que soit le rapport de x à y.

On a d'ailleurs

$$A'\cos^2\varphi + B'\sin^2\varphi - A \overline{\gtrless} A' - A \overline{\gtrless} 0.$$

Donc, pour que l'expression (4) ne puisse pas devenir négative, il sera nécessaire et suffisant que le déterminant

$$(A' - B')^2\sin^2\varphi\cos^2\varphi - (A'\cos^2\varphi + B'\sin^2\varphi - A)(A'\sin^2\varphi + B'\cos^2\varphi - B)$$

soit $\overline{\lessgtr}\ 0$.

Effectuant les calculs et réduisant, cette expression deviendra

$$(5) \qquad -(A' - A)(B' - B) + (B' - A')(B - A)\sin^2\varphi \overline{\lessgtr} 0.$$

Donc l'angle φ ne devra pas dépasser en valeur absolue l'angle λ, défini par l'équation

$$\sin^2\lambda = \frac{(A'-A)(B'-B)}{(B'-A')(B-A)}. \tag{6}$$

4. Ces préliminaires posés, supposons que C′ soit placé en équilibre sur C, et de telle sorte que OX′, OY′ coïncident avec OX et OY. Donnons à C′ un mouvement virtuel infiniment petit, qui le laisse en contact avec l'appui C, et cherchons à évaluer quelle sera, après le mouvement, la position d'un point de C′, dont les coordonnées initiales étaient des quantités données X, Y, Z.

5. Soient P le point de C par lequel le contact se fait après le mouvement effectué; x, y, z ses coordonnées; $P\zeta$ la normale ascendante à la surface S au point P; $P\xi$, $P\eta$ les tangentes aux sections normales de courbure minimum et maximum; A_1, B_1 les courbures correspondantes; a, b, c; a_1, b_1, c_1; a_2, b_2, c_2 les cosinus directeurs des trois droites $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$.

Soient, d'autre part, P′ le point de C′ qui vient en contact avec le point P à la fin du mouvement; x', y', z' ses coordonnées initiales; $P'\zeta'$ la normale ascendante à la surface S′ au point P′; $P'\xi'$, $P'\eta'$ les tangentes aux sections normales de courbure minimum et maximum; A'_1, B'_1 les courbures correspondantes; a', b', c'; a'_1, b'_1, c'_1; a'_2, b'_2, c'_2 les cosinus directeurs des droites $P'\xi'$, $P'\eta'$, $P'\zeta'$.

A la fin du mouvement, $P'\zeta'$ sera venue s'appliquer sur $P\zeta$; $P'\xi'$ et $P'\eta'$ seront venues se placer dans le plan tangent à S au point P, et formeront respectivement avec $P\xi$ et $P\eta$ un certain angle, que nous désignerons par γ.

6. Cela posé, considérons le point Q, dont les coordonnées initiales sont X, Y, Z. Ses coordonnées ξ', η', ζ' par rapport aux axes $P'\xi'$, $P'\eta'$, $P'\zeta'$ seront données par les formules connues

$$\left\{\begin{aligned} \xi' &= a'(X-x') + b'(Y-y') + c'(Z-z'),\\ \eta' &= a'_1(X-x') + b'_1(Y-y') + c'_1(Z-z'),\\ \zeta' &= a'_2(X-x') + b'_2(Y-y') + c'_2(Z-z'). \end{aligned}\right. \tag{7}$$

Ces nouveaux axes étant entraînés par le mouvement du corps C', les coordonnées ξ', η', ζ' ne seront pas modifiées par ce mouvement, et les coordonnées finales de Q par rapport aux axes $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$ seront données par les formules

$$(8)\qquad \xi = \xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma,\quad \eta = -\xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma,\quad \zeta = \zeta'.$$

Enfin ses coordonnées finales par rapport à OX, OY, OZ seront

$$(9)\qquad \begin{cases} X_1 = x + a\xi + a_1\eta + a_2\zeta, \\ Y_1 = y + b\xi + b_1\eta + b_2\zeta, \\ Z_1 = z + c\xi + c_1\eta + c_2\zeta. \end{cases}$$

7. Appliquons ces formules au calcul du déplacement vertical du centre de gravité G.

Les coordonnées initiales de ce point étant o, o, h, sa hauteur finale h_1 sera donnée par la formule

$$\begin{aligned} h_1 &= z + c\xi + c_1\eta + c_2\zeta \\ &= z + c(\xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma) + c_1(-\xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma) + c_2\zeta', \end{aligned}$$

ξ', η', ζ' étant fournis par les équations (7) lorsqu'on y pose $X = Y = 0$, $Z = h$.

Substituant ces valeurs dans la formule précédente, on trouve pour le déplacement vertical $h_1 - h$ du centre de gravité l'expression suivante :

$$(10)\qquad \begin{cases} h_1 - h = z + (c\cos\gamma - c_1\sin\gamma)[-a'x' - b'y' + c'(h - z')] \\ \qquad + (c\sin\gamma + c_1\cos\gamma)[-a'_1x' - b'_1y' + c'_1(h - z')] \\ \qquad + c_2[-a'_2x' - b'_2y' + c'_2(h - z')] - h. \end{cases}$$

Pour achever le calcul, il reste à exprimer z, z' et les coefficients angulaires $a, b, c, \ldots, a'_2, b'_2, c'_2$ en fonction des variables indépendantes x, y, x', y', γ.

En nous bornant provisoirement aux termes du second ordre par rapport à x, y, x', y', nous aurons

$$(11)\qquad z = \frac{Ax^2 + By^2}{2},\quad z' = \frac{A'x'^2 + By'^2}{2}.$$

D'autre part, $P\xi$, $P\eta$, $P\zeta$, ainsi que $P'\xi'$, $P'\eta'$, $P'\zeta'$, sont sensiblement parallèles à OX, OY, OZ; donc b, c, a_1, c_1, a_2, b_2 et $b', c', a'_1, c'_1, a'_2, b'_2$ sont infiniment petits, et $a, b_1, c_2, a', b'_1, c'_2$ seront très-voisins de l'unité. D'après cette remarque, la valeur de $h_1 - h$ se réduira, en négligeant le troisième ordre, à la forme

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 - h = z &+ (c\cos\gamma - c_1\sin\gamma)(-x' + c'h) \\ &+ (c\sin\gamma - c_1\cos\gamma)(-y' + c'_1 h) \\ &- a'_2 x' - b'_2 y' - z' + (c_2 c'_2 - 1)h, \end{aligned}\right.$$

les cosinus directeurs qui subsistent dans la formule devant être calculés jusqu'au premier ordre, sauf c_2 et c'_2 pour lesquels on devra aller jusqu'au second ordre.

8. Or désignons, suivant l'usage, par p, q les dérivées partielles de z par rapport à x et y. La droite $P\xi$ se trouvant dans le plan tangent à S, ses cosinus directeurs satisfont à la relation

$$(13)\qquad c = pa + qb, \quad \text{d'où} \quad c = \mathrm{A}x,$$

en remplaçant p, q, a et b par leurs valeurs approchées $\mathrm{A}x$, $\mathrm{B}y$, 1 et 0 On trouvera de même

$$(14)\qquad c_1 = \mathrm{B}y, \quad c' = \mathrm{A}'x', \quad c'_1 = \mathrm{B}'y'.$$

D'autre part, $P'\zeta'$ est normale à S'; on aura donc, en désignant par p', q' les dérivées partielles de z' par rapport à x', y',

$$(15)\quad a'_2 = -\frac{p'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}, \quad b'_2 = -\frac{q'}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}}, \quad c'_2 = \frac{1}{\sqrt{1+p'^2+q'^2}},$$

expressions qui se réduiront à

$$(16)\quad a'_2 = -\mathrm{A}'x', \quad b'_2 = -\mathrm{B}'y', \quad c'_2 = 1 - \frac{\mathrm{A}'^2x'^2 + \mathrm{B}'^2y'^2}{2},$$

en remplaçant p', q' par leurs valeurs approchées $\mathrm{A}'x'$, $\mathrm{B}'y'$.

On trouve enfin, de la même manière,

$$(17)\qquad c_2 = 1 - \frac{\mathrm{A}^2x^2 + \mathrm{B}^2y^2}{2}.$$

Substituant pour z, z' et les cosinus directeurs les valeurs que nous venons de trouver, la formule (12) deviendra, en s'arrêtant toujours au second ordre,

$$(18)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 - h = {} & \frac{Ax^2+By^2}{2} + (Ax\cos\gamma - By\sin\gamma)(-1+A'h)x' \\ & + (Ax\sin\gamma + By\sin\gamma)(-1+B'h)y' + \frac{A'x'^2+B'y'^2}{2} \\ & - h\left(\frac{A^2x^2+B^2y^2}{2} + \frac{A'^2x'^2+B'^2y'^2}{2}\right). \end{aligned}\right.$$

Cette expression peut se mettre sous la forme suivante :

$$(19)\quad \left\{\begin{aligned} h_1 - h = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A'} - h\right)(A'x' - Ax\cos\gamma + By\sin\gamma)^2 \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B'} - h\right)(B'y' - Ax\sin\gamma - By\cos\gamma)^2 \\ & + \frac{1}{2M}(Mx + Ny)^2 + \frac{D}{2M}y^2, \end{aligned}\right.$$

en posant, pour abréger,

$$(20)\quad M = A - \frac{A^2\cos^2\gamma}{A'} - \frac{A^2\sin^2\gamma}{B'} = \frac{A}{A'}\left[A' - A + \frac{A}{B'}(B' - A')\sin^2\gamma\right],$$

$$(21)\quad N = \left(\frac{AB}{A'} - \frac{AB}{B'}\right)\sin\gamma\cos\gamma,$$

$$(22)\quad \left\{\begin{aligned} D &= M\left(B - \frac{B^2\cos^2\gamma}{B'} - \frac{B^2\sin^2\gamma}{A'}\right) - N^2 \\ &= \frac{AB}{A'B'}[(A'-A)(B'-B) - (B-A)(B'-A')\sin^2\gamma]. \end{aligned}\right.$$

9. On sait que l'équilibre sera stable si $h_1 - h$ est constamment positif, quels que soient x, y, x', y', γ. Faisons d'abord $\gamma = 0$. Pour que les quatre carrés que contient $h_1 - h$ soient positifs, il faudra qu'on ait

$$(23)\qquad \frac{1}{A'} - h > 0,\quad \frac{1}{B'} - h > 0,\quad \frac{A}{A'} > 0,\quad \frac{B}{B'} > 0;$$

car $A' - A$ et $B' - B$ sont positifs.

Ces conditions expriment :

1° *Que le point* G *est situé au-dessous des centres de courbure de la surface* S';

2° *Que les deux courbures principales de* S' *ont respectivement le même signe que les courbures correspondantes de* S.

Nous allons prouver que, si ces conditions sont satisfaites, $h_1 - h$ sera toujours positif, ce qui assurera, comme on sait, la stabilité de l'équilibre.

Deux cas seront à distinguer dans cette démonstration.

10. *Premier cas.* — Si $A' > B$, la quantité positive $(A' - A)(B' - B)$ sera plus grande que $(B - A)(B' - A')$, et *a fortiori* plus grande que $(B - A)(B' - A')\sin^2\gamma$. Donc D sera positif. D'autre part, A et B' sont de même signe. Car, si l'on avait

$$A < 0, \quad B' > 0, \tag{24}$$

on aurait, en vertu des relations (23),

$$A' < 0, \quad B > 0, \quad \text{d'où} \quad A' < B,$$

contrairement à l'hypothèse. Donc M aura tous ses termes positifs; donc $h_1 - h$ sera une somme de carrés positifs.

11. *Deuxième cas.* — Soit $A' < B$. L'angle γ ne pourra plus prendre toutes les valeurs possibles. En effet, en désignant par A_1, B_1 les courbures principales de S au point P et par A'_1, B'_1 les courbures principales de S' au point P', on a vu (3) que le corps C' pénétrerait le corps C si γ dépassait la limite λ_1, définie par l'équation

$$\sin^2\lambda_1 = \frac{(A'_1 - A_1)(B'_1 - B_1)}{(B'_1 - A'_1)(B_1 - A_1)}, \tag{25}$$

limite qui diffère infiniment peu de la limite λ, définie par l'équation (6); car A_1, B_1, A'_1, B'_1 diffèrent infiniment peu de A, B, A', B'.

La quantité M sera constamment positive; car, si $\frac{A}{B'}$ est positif, tous ses termes seront positifs; et si $\frac{A}{B'}$ est négatif, M sera minimum lorsque

γ atteindra sa valeur maximum λ_1; ce minimum sera sensiblement égal à

$$(26)\quad \frac{A}{A'}\left[A'-A+\frac{A}{B'}(B'-A')\frac{(A'-A)(B'-B)}{(B'-A')(B-A)}\right]=\frac{AB}{A'B'}\frac{(A'-A)(B'-A)}{B-A},$$

expression qui est un produit de facteurs positifs.

L'expression D sera également finie et positive, tant que γ sera sensiblement inférieur à λ; mais, pour les valeurs de γ infiniment voisines de sa limite λ_1 (laquelle est elle-même infiniment voisine de λ), D sera infiniment petit; cette valeur infiniment petite pourra même devenir négative, si $\lambda_1 > \lambda$.

Si, en même temps que γ se rapproche de sa limite, on donne à x, y, x', y' des valeurs telles, que les expressions $A'x' - Ax\cos\gamma + By\sin\gamma$, $B'y' - Ax\sin\gamma - By\cos\gamma$, $Mx + Ny$ soient des infiniment petits d'un ordre supérieur au premier, les termes qui constituent, d'après l'équation (19), la valeur approchée de $h_1 - h$ seront d'un ordre supérieur au second, et pourront devenir comparables aux termes négligés. Pour déterminer avec précision le signe de $h_1 - h$, il sera donc nécessaire de pousser l'approximation à un ordre supérieur au second, où nous nous étions arrêtés jusqu'ici.

12. Ce calcul serait extrêmement compliqué s'il fallait l'exécuter pour deux surfaces quelconques S et S'. Mais voici une remarque qui permet de le simplifier :

Substituons aux deux surfaces données S et S' deux autres surfaces S_1, S'_1 qui leur soient tangentes au point O, et telles, que dans le voisinage de ce point S_1 soit au-dessous de S, et S'_1 au-dessus de S_1. Supposons que, en faisant mouvoir S'_1 sur S_1, $h_1 - h$ soit constamment positif; il en sera de même dans le mouvement de S' sur S.

Considérons en effet la surface mobile S' dans une quelconque de ses positions, et supposons qu'elle ait entraîné S'_1 dans son mouvement. Cette dernière surface étant au-dessus de S', qui repose sur S, laquelle est au-dessus de S_1, sera au-dessus de S_1. On pourra la rendre tangente à S_1 en l'abaissant d'une certaine quantité. Cela fait, $h_1 - h$ sera positif, par hypothèse. Donc il l'était *a fortiori* avant le dernier abaissement qu'on a fait subir au système.

13. Cela posé, admettons d'abord que les quatre courbures A, A′, B, B′ aient le même signe. On pourra, d'après la remarque précédente, substituer à la surface S une surface S_1, dont les courbures $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ soient du même signe que précédemment, mais toutes deux inférieures à A, cette nouvelle surface étant évidemment au-dessous de S dans les environs du point O. Or, si nous étudions le mouvement de S′ sur S_1, nous serons dans le premier cas déjà étudié; car $\mathcal{B}$ étant $<$ A sera *a fortiori* $<$ A′; on a d'ailleurs, par hypothèse,

$$(27)\qquad \frac{1}{A'} - h > 0, \quad \frac{1}{B'} - h > 0, \quad \frac{\mathcal{A}}{A'} > 0, \quad \frac{\mathcal{B}}{A'} > 0.$$

Donc $h_1 - h$ sera positif.

14. Il reste à considérer le cas où les courbures A, A′, B, B′ n'auraient pas toutes le même signe. La courbure B′ étant, par hypothèse, la plus grande des quatre, sera positive, et $\frac{B}{B'}$ étant positif, B sera également positive; au contraire, A et A′ seront négatives.

Cela posé, on peut substituer à la surface S une surface du second degré S_1 dont les courbures $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient des quantités quelconques respectivement moindres que A et B, mais de même signe que ces dernières quantités. La quantité $\mathcal{A}$, étant simplement assujettie à être comprise entre A et $-\infty$, sera négative, et pourra avoir une valeur absolue aussi grande que l'on voudra.

On peut substituer, d'autre part, à S′ une surface du second degré dont les courbures $\mathcal{A}'$ et $\mathcal{B}'$ soient plus grandes que A′ et B′ et de même signe que ces quantités, et satisfassent en outre aux relations

$$(28)\qquad \frac{1}{\mathcal{A}'} - h > 0, \quad \frac{1}{\mathcal{B}'} - h > 0.$$

$\mathcal{B}'$ pourra être pris aussi grand que l'on voudra; car la relation $\frac{1}{A'} - h > 0$, où A′ est négatif, montre que h est négatif. Donc $\frac{1}{\mathcal{B}'} - h$ sera > 0, quelque grand que soit $\mathcal{B}'$.

Il résulte de là que, dans l'étude du signe de $h_1 - h$, on pourra se borner au cas où les deux corps C et C′ sont limités par des surfaces du second degré. On pourra, en outre, se donner arbitrairement la courbure minimum de C et la courbure maximum de C', pourvu qu'elles soient respectivement négative et positive, et suffisamment grandes en valeur absolue. Il nous sera donc permis de supposer qu'elles sont respectivement égales à $-\frac{1}{\varepsilon}$ et à $\frac{1}{\varepsilon}$, ε étant une quantité très-petite.

15. Dans cette hypothèse simple, il deviendra facile d'effectuer le calcul de $h_1 - h$ jusqu'aux termes du quatrième ordre.

Soient, en effet,

$$z = \frac{Ax^2 + By^2}{2}, \quad z' = \frac{A'x'^2 + B'y'^2}{2} \tag{29}$$

les équations des deux surfaces S et S', et soient

$$\left\{ \begin{array}{lllll} p = Ax, & q = By, & r = A, & s = 0, & t = B, \\ p' = A'x', & q' = B'y', & r' = A', & s' = 0, & t' = B' \end{array} \right. \tag{30}$$

les dérivées partielles du premier et du second ordre des ordonnées z et z' de ces deux surfaces.

La quantité $h_1 - h$ sera donnée par la formule (10), dans laquelle il faudra calculer les cosinus directeurs $a, b, c, \ldots, a_2, b_2, c_2$.

16. Commençons par le calcul de a, b, c. Ces cosinus directeurs seront donnés par les formules connues (Bertrand, *Calcul différentiel*, n° 633)

$$c = pa + qb, \tag{31}$$

$$\left\{ \begin{array}{l} [pqt - (1+q^2)s]\, b^2 + [(1+p^2)t - (1+q^2)r]\, ab \\ \qquad + [(1+p^2)s - pqr]\, a^2 = 0, \end{array} \right. \tag{32}$$

$$a^2 + b^2 + (pa + qb)^2 = 1. \tag{33}$$

On a d'ailleurs ici $s = 0$, p, q, b infiniment petits, et $a = 1 - \tau$, τ étant infiniment petit du second ordre. Substituant ces valeurs de s et de a

dans l'équation (32), elle deviendra, au troisième ordre près,

$$(34)\qquad (t-r)b+(p^2t-q^2r)b-pqr=0.$$

La quantité $t-r$ étant finie, on voit, par cette équation, que b est du second ordre; $(p^2t-q^2r)b$ sera du quatrième ordre : on aura donc, au quatrième ordre près,

$$(35)\qquad b=\frac{pqr}{t-r}.$$

L'équation (33) donnera ensuite, en posant $s=0$, $a=1-\tau$, et négligeant le quatrième ordre,

$$-2\tau+p^2=0,\quad \text{d'où}\quad \tau=\frac{p^2}{2},$$

et par suite, au quatrième ordre près,

$$(36)\qquad a=1-\frac{p^2}{2}.$$

L'équation (31) donnera ensuite

$$(37)\qquad c=p-\frac{p^3}{2}+\frac{pq^2r}{t-r},$$

valeur exacte jusqu'au quatrième ordre inclusivement.

On trouvera de la même manière

$$(38)\qquad \left\{\begin{array}{lll} a_1=\dfrac{pqt}{r-t}, & b_1=1-\dfrac{q^2}{2}, & c_1=q-\dfrac{q^3}{2}+\dfrac{qp^2t}{r-t},\\ a'=1-\dfrac{p'^2}{2}, & b'=\dfrac{p'q'r'}{t'-r'}, & c'=p'-\dfrac{p'^3}{2}+\dfrac{p'q'^2r'}{t'-r'},\\ a'_1=\dfrac{p'q't'}{r'-t'}, & b'_1=1-\dfrac{q'^2}{2}, & c'_1=q'-\dfrac{q'^3}{2}+\dfrac{q'p'^2t'}{r'-t'}. \end{array}\right.$$

17. Il ne reste plus qu'à calculer $a_2, b_2, c_2, a'_2, b'_2, c'_2$. Or on a exactement

$$a_2=\frac{-p}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad b_2=\frac{-q}{\sqrt{1+p^2+q^2}},\quad c_2=\frac{1}{\sqrt{1+p^2+q^2}}$$

et, en s'arrêtant aux termes du quatrième ordre,

$$(39)\qquad \begin{cases} a_2 = -p\left(1-\dfrac{p^2+q^2}{2}\right), \\ b_2 = -q\left(1-\dfrac{p^2+q^2}{2}\right), \\ c_2 = 1-\dfrac{p^2+q^2}{2}+\dfrac{3}{8}(p^2+q^2)^2. \end{cases}$$

On aura de même

$$(40)\qquad \begin{cases} a'_2 = -p'\left(1-\dfrac{p'^2+q'^2}{2}\right), \\ b'_2 = -q'\left(1-\dfrac{p'^2+q'^2}{2}\right), \\ c'_2 = 1-\dfrac{p'^2+q'^2}{2}+\dfrac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2. \end{cases}$$

Substituant les valeurs ci-dessus des cosinus directeurs dans l'équation (10) et négligeant les termes d'ordre supérieur au quatrième, il viendra

$$(41)\qquad h_1 - h = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{A'}-h\right)\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B'}-h\right)\beta^2 + \frac{1}{2M}n^2 + \frac{D}{2M}y^2 + R,$$

en posant, pour abréger,

$$(42)\qquad -\alpha = A'x' - Ax\cos\gamma + By\sin\gamma = p' - p\cos\gamma + q\sin\gamma,$$

$$(43)\qquad \beta = B'y' - Ax\sin\gamma - By\cos\gamma = q' - p\sin\gamma - q\cos\gamma,$$

$$(44)\qquad n = Mx + Ny,$$

$$(45)\qquad \left\{\begin{aligned} R = {} & (p\cos\gamma - q\sin\gamma)\left[\frac{p'^2x'}{2} - \frac{p'q'r'y'}{t'-r'} + h\left(-\frac{p'^3}{2}+\frac{p'q'^2r'}{t'-r'}\right) - p'z'\right] \\ & + (p\sin\gamma + q\cos\gamma)\left[-\frac{p'q't'x'}{r'-t'} + \frac{q'^2y'}{2} + h\left(-\frac{q'^3}{2}+\frac{q'p'^2t'}{r'-t'}\right) - q'z'\right] \\ & - \frac{p'^2+q'^2}{2}(p'x' + q'y' - z') + \frac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2 h \\ & + \left[\left(-\frac{p^3}{2}+\frac{pq^2r}{t-r}\right)\cos\gamma - \left(-\frac{q^3}{2}+\frac{p^2qt}{r-t}\right)\sin\gamma\right](-x'+p'h) \\ & + \left[\left(-\frac{p^3}{2}+\frac{pq^2r}{t-r}\right)\sin\gamma + \left(-\frac{q^3}{2}+\frac{p^2qt}{r-t}\right)\cos\gamma\right](-y'+q'h) \\ & - \frac{p^2+q^2}{2}\left(p'x' + q'y' - \frac{p'^2+q'^2}{2}h - z'\right) + \frac{3}{8}(p^2+q^2)^2 h. \end{aligned}\right.$$

18. Nous devons chercher le signe que prend la quantité $h_1 - h$ lorsque α, β, n sont des quantités infiniment petites d'un ordre supérieur au premier et lorsque D est également infiniment petit. Ces hypothèses simplifient beaucoup le calcul de R. En effet, R étant du quatrième ordre, on n'y négligera que des termes d'ordre supérieur à celui-là, en y supposant les équations

$$\alpha = 0, \quad \beta = 0, \quad n = 0, \quad D = 0$$

rigoureusement satisfaites; mais on déduit de ces équations

$$(46)\quad \left\{\begin{array}{l} p\cos\gamma - q\sin\gamma = p', \quad p\sin\gamma + q\cos\gamma = q', \\ p'\cos\gamma + q'\sin\gamma = p, \quad -p'\sin\gamma + q'\cos\gamma = q, \\ \qquad\qquad p^2 + q^2 = p'^2 + q'^2. \end{array}\right.$$

En vertu de ces équations, les termes en h disparaîtront de l'expression de R. En effet, le multiplicateur de h peut se mettre sous la forme

$$(47)\quad \left\{\begin{array}{l} p'\left(-\frac{p'^2}{2} + \frac{p'q'^2r'}{t'-r'}\right) + q'\left(-\frac{q'^2}{2} + \frac{p'^2q't'}{r'-t'}\right) + \frac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2 \\ \quad + \left(-\frac{p^3}{2} + \frac{pq^2r}{t-r}\right)p + \left(-\frac{q^3}{2} + \frac{p^2qt}{r-t}\right)q \\ \quad + \frac{1}{4}(p^2+q^2)(p'^2+q'^2) + \frac{3}{8}(p^2+q^2)^2 \\ = -\frac{p'^4}{2} - \frac{q'^4}{2} - p'^2q'^2 + \frac{3}{8}(p'^2+q'^2)^2 \\ \quad - \frac{p^4}{2} - \frac{q^4}{2} - p^2q^2 + \frac{1}{4}(p^2+q^2)(p'^2+q'^2) + \frac{3}{8}(p^2+q^2)^2 \\ = \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)(p'^2+q'^2)^2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8}\right)(p^2+q^2)^2 \\ \quad + \frac{1}{4}(p^2+q^2)(p'^2+q'^2) \\ = (p^2+q^2)^2\left(-\frac{1}{2} + \frac{3}{8} - \frac{1}{2} + \frac{3}{8} + \frac{1}{4}\right) = 0. \end{array}\right.$$

Les autres termes de l'expression de R pourraient également se réduire d'une façon très-notable; mais, pour simplifier le calcul, nous allons introduire la supposition

$$A = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad B = \frac{1}{\varepsilon},$$

dont nous avons parlé plus haut. La quantité ε étant d'une petitesse arbitraire, le signe de R sera déterminé par ceux de ses termes qui contiennent ε à la moindre puissance.

19. Calculons d'abord $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$. On a, pour déterminer $\sin\gamma$, l'équation

$$D = (A' - A)(B' - B) - (B' - A')(B - A)\sin^2\gamma = 0,$$

d'où

$$\sin^2\gamma = \frac{\left(A' + \frac{1}{\varepsilon}\right)\left(\frac{1}{\varepsilon} - B\right)}{\left(\frac{1}{\varepsilon} - A'\right)\left(B + \frac{1}{\varepsilon}\right)} = \frac{(1 + \varepsilon A')(1 - \varepsilon B)}{(1 - \varepsilon A')(1 + \varepsilon B)} = 1 - 2\varepsilon(B - A'),$$

en négligeant ε^2.

On aura, par suite,

$$\cos\gamma = \sqrt{2(B - A')}\,\varepsilon^{\frac{1}{2}} \tag{48}$$

et, en négligeant ε,

$$\sin\gamma = 1. \tag{49}$$

20. On a ensuite $q = By$. D'autre part, on déterminera la valeur approchée de p par l'équation

$$n = Mx + Ny = \frac{M}{A}p + \frac{N}{B}q = 0. \tag{50}$$

On a, en effet,

$$\left\{\begin{aligned} \frac{M}{A} &= \frac{1}{A'}\left[A' - A + \frac{A}{B'}(B' - A')\sin^2\gamma\right] \\ &= \frac{1}{A'}\left\{A' + \frac{1}{\varepsilon} - \left(\frac{1}{\varepsilon} - A'\right)[1 - 2\varepsilon(B - A')]\right\} = \frac{2B}{A'}, \end{aligned}\right. \tag{51}$$

en négligeant les termes en ε.

D'autre part,

$$\frac{N'}{B} = \left(\frac{A}{A'} - \frac{A}{B'}\right) \sin\gamma \cos\gamma = \left(\frac{-1}{\varepsilon A'} + 1\right) \sin\gamma \cos\gamma,$$

ou sensiblement

$$(52) \qquad \frac{N}{B} = -\frac{\cos\gamma}{\varepsilon A'} = -\frac{\sqrt{2(B-A')}}{A'} \varepsilon^{-\frac{1}{2}}.$$

On aura, par suite,

$$(53) \qquad p = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2B} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} q = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} y.$$

On aura ensuite les valeurs approchées suivantes :

$$(54) \qquad \left\{\begin{aligned}
p' &= p\cos\gamma - q\sin\gamma = \frac{2(B-A')}{2B} q - q = -A'y, \\
q' &= p\sin\gamma + q\cos\gamma = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2} \varepsilon^{-\frac{1}{2}} y, \\
x &= \frac{p}{A} = -\varepsilon p = -\frac{\sqrt{2(B-A')}}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} y, \\
z &= \frac{Ax^2 + By^2}{2} = \frac{B+A'}{4} y^2, \\
x' &= \frac{p'}{A'} = -y, \\
y' &= \frac{q'}{B'} = \varepsilon q' = \frac{\sqrt{2(B-A')}}{2} \varepsilon^{\frac{1}{2}} y, \\
z' &= \frac{A'x'^2 + B'y'^2}{2} = \frac{B+A'}{4} y^2
\end{aligned}\right.$$

et enfin

$$r = A = -\frac{1}{\varepsilon}, \quad t = B, \quad r' = A', \quad t' = B' = \frac{1}{\varepsilon}.$$

21. Substituant ces valeurs dans l'expression (45), négligeant les termes en h, qui s'annulent comme on l'a déjà vu, négligeant également les termes qui n'ont pas ε en dénominateur, il viendra, toutes réductions faites,

$$(55) \qquad R = \frac{1}{4} \frac{y^4}{\varepsilon} (B - A')^2.$$

R est donc nécessairement positif. Il est d'ailleurs évident qu'il en est de même des autres termes de l'expression (41), à l'exception du terme $\frac{D}{2M}y^2$.

22. Cherchons à déterminer la valeur minimum que puisse prendre ce terme. Ce minimum correspondra évidemment à la valeur limite λ_1 de l'angle γ, définie, comme on l'a vu plus haut, par l'équation (25). Comme λ_1 diffère infiniment peu de λ, la valeur correspondante de M sera sensiblement définie par l'équation trouvée plus haut,

$$\frac{M}{A} = \frac{2B}{A'};$$

d'où l'on déduit, en remplaçant A par $-\frac{1}{\varepsilon}$,

$$M = -\frac{2B}{A'\varepsilon}. \tag{56}$$

Il reste à déterminer la valeur correspondante de D, laquelle est égale à

$$(A'-A)(B'-B)-(B'-A')(B-A)\frac{(A'_1-A_1)(B'_1-B_1)}{(B'_1-A'_1)(B_1-A_1)}.$$

Cette expression peut se mettre sous la forme

$$D = \frac{(A'-A)(B'-B)(B'_1-A'_1)(B_1-A_1)-(B'-A')(B-A)(A'_1-A_1)(B'_1-B_1)}{(B'_1-A'_1)(B_1-A_1)}. \tag{57}$$

Le dénominateur de cette expression est sensiblement égal à $(B'-A')(B-A)$, quantité qui se réduit elle-même sensiblement à $\frac{1}{\varepsilon^2}$.

23. Il reste à évaluer le numérateur. Pour cela, nous devons calculer les valeurs approchées de A_1, B_1, A'_1, B'_1, et pousser le calcul jusqu'aux termes du second ordre en x, y, x', y'.

24. Or A_1 et B_1 sont les racines de l'équation suivante (BERTRAND, *Calcul différentiel*, n° **634**) :

$$(58)\quad \begin{cases} rt - s^2 - \sqrt{1+p^2+q^2}\,[(1+p^2)\,t + (1+q^2)\,r - 2pqs]\,\rho \\ \qquad\qquad + (1+p^2+q^2)^2\rho^2 = 0. \end{cases}$$

D'ailleurs s est nul, et p et q infiniment petits ; d'autre part, A_1 diffère infiniment peu de $A = r$.

Posons donc $\rho = r + \tau$; l'équation deviendra, en y supprimant les termes d'ordre supérieur au second et ceux qui se détruisent mutuellement,

$$(59)\quad \begin{cases} -\frac{p^2+q^2}{2}(t+r)\,r - (p^2t + q^2r)\,r - (t+r)\,\tau \\ \qquad\qquad + 2(p^2+q^2)\,r^2 + 2r\tau + \tau^2 = 0. \end{cases}$$

Cette équation montre que τ est du second ordre et a pour valeur approchée

$$(60)\quad \frac{\frac{p^2+q^2}{2}(t+r)\,r + (p^2t+q^2r)\,r - 2(p^2+q^2)\,r^2}{r-t} = -\frac{r}{2}(3p^2+q^2).$$

On aura donc, r étant égal à A,

$$(61)\quad A_1 = A - \frac{A}{2}(3p^2+q^2);$$

on aura de même

$$(62)\quad \begin{cases} B_1 = B - \frac{B}{2}(3q^2+p^2), \\ A'_1 = A' - \frac{A'}{2}(3p'^2+q'^2), \\ B'_1 = B' - \frac{B'}{2}(3q'^2+p'^2). \end{cases}$$

Substituant ces valeurs dans le numérateur $\mathfrak{N}$ de D, et ne conservant que les termes du second ordre, il viendra

$$(63)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{N} = {} & (A'-A)(B'-B)(B'-A')\left[\frac{A}{2}(3p^2+q^2)-\frac{B}{2}(3q^2+p^2)\right]\\ & +(A'-A)(B'-B)(B-A)\left[\frac{A'}{2}(3p'^2+q'^2)-\frac{B'}{2}(3q'^2+p'^2)\right]\\ & -(B'-A')(B-A)(A'-A)\left[\frac{B}{2}(3q^2+p^2)-\frac{B'}{2}(3q'^2+p'^2)\right]\\ & -(B'-A')(B-A)(B'-B)\left[\frac{A}{2}(3p^2+q^2)-\frac{A'}{2}(3p'^2+q'^2)\right]\\ = {} & -\frac{A}{2}(3p^2+q^2)(B'-B)(B'-A')(B-A')\\ & +\frac{A'}{2}(3p'^2+q'^2)(B'-B)(B-A)(B'-A)\\ & -\frac{B}{2}(3q^2+p^2)(B'-A')(A'-A)(B'-A)\\ & +\frac{B'}{2}(3q'^2+p'^2)(B-A)(A'-A)(B-A').\end{aligned}\right.$$

Remplaçons dans cette expression A, B', p, q, p', q' par leurs valeurs en ε; il viendra, en négligeant tous les termes qui n'ont pas ε^4 au dénominateur,

$$(64)\quad\left\{\begin{aligned}\mathfrak{N} &= \frac{y^2}{\varepsilon^4}\left[\frac{3}{4}(B-A')^2+\frac{3}{2}A'(B-A')-B\frac{B-A'}{2}+\frac{3}{4}(B-A')^2\right]\\ &= \frac{y^2}{\varepsilon^4}B(B-A').\end{aligned}\right.$$

La valeur minimum de $\frac{D}{2M}y^2$ sera donc sensiblement égale à

$$(65)\qquad \frac{\frac{y^4}{\varepsilon^4}B(B-A')}{-\frac{1}{\varepsilon^2}\frac{4B}{A'\varepsilon}} = -\frac{A'(B-A')y^4}{4\varepsilon},$$

quantité positive, puisque A' est négatif et B positif.

Donc tous les termes de $h_1 - h$ sont positifs, ce qu'il fallait démontrer.

II.

25. Nous avons établi, dans la Section précédente, que les conditions (**23**) suffisent à assurer la stabilité de l'équilibre. Nous allons prouver, d'autre part, qu'elles sont nécessaires, en établissant les équations différentielles des oscillations infiniment petites que le solide C' peut exécuter autour de sa position d'équilibre.

Soient X, Y, Z les coordonnées initiales d'un point quelconque du solide; ses coordonnées X_1, Y_1, Z_1, à un instant quelconque du mouvement, seront données par les formules (7), (8), (9).

Remplaçons dans ces formules les cosinus directeurs par leurs valeurs approchées trouvées plus haut (n^os **16** et **17**), il viendra, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$(66)\quad \left\{\begin{aligned}
X_1 &= x + \xi - p\zeta = x + \xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma - p\zeta' \\
&= x + \cos\gamma\,(X - x' + p'Z) + \sin\gamma\,(Y - y' + q'Z) - pZ \\
&= x - x'\cos\gamma - y'\sin\gamma + X\cos\gamma + Y\sin\gamma \\
&\quad + Z(p'\cos\gamma + q'\sin\gamma - p), \\
Y_1 &= y + \eta - q\zeta = y - \xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma - q\zeta' \\
&= y - \sin\gamma\,(X - x' + p'Z) + \cos\gamma\,(Y - y' + q'Z) - qZ \\
&= y + x'\sin\gamma - y'\cos\gamma - X\sin\gamma + Y\cos\gamma \\
&\quad + Z(-p'\sin\gamma + q'\cos\gamma - q), \\
Z_1 &= p\xi + q\eta + \zeta = p(\xi'\cos\gamma + \eta'\sin\gamma) \\
&\quad + q\,(-\xi'\sin\gamma + \eta'\cos\gamma) + \zeta' \\
&= p(X\cos\gamma + Y\sin\gamma) + q\,(-X\sin\gamma + Y\cos\gamma) - p'X - q'Y + Z \\
&= (p\cos\gamma - q\sin\gamma - p')X + (p\sin\gamma + q\cos\gamma - q')\,Y - Z.
\end{aligned}\right.$$

26. Ces expressions se simplifieront beaucoup en prenant pour variables indépendantes y, γ, et les quantités α, β, n définies par les équations (42), (43) et (44).

En effet, substituons d'abord, dans les formules (66), les valeurs de x', y', p', q', tirées des équations (42) et (43), et remplaçons, en outre, p et q par leurs valeurs $\frac{x}{A}$, $\frac{y}{B}$, il viendra

$$X_1 = \alpha\cos\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) + \beta\sin\gamma\left(Z - \frac{1}{B'}\right) + x\left(1 - \frac{A\cos^2\gamma}{A'} - \frac{A\sin^2\gamma}{B'}\right)$$
$$+ y\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{B}{A'} - \frac{B}{B'}\right) + X\cos\gamma + Y\sin\gamma,$$

ou, comme on a

$$1 - \frac{A\cos^2\gamma}{A'} - \frac{A\sin^2\gamma}{B'} = \frac{M}{A}, \quad \sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{B}{A} - \frac{B}{B'}\right) = \frac{N}{A},$$

$$(67)\quad X_1 = \alpha\cos\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \beta\sin\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) + \frac{n}{A} + X\cos\gamma + Y\sin\gamma.$$

On aura de même

$$Y_1 = -\alpha\sin\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \beta\cos\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) + x\sin\gamma\cos\gamma\left(\frac{A}{A'} - \frac{A}{B'}\right)$$
$$+ y\left(1 - \frac{B}{A'}\sin^2\gamma - \frac{B}{B'}\cos^2\gamma\right) - X\sin\gamma + Y\cos\gamma$$

ou, en éliminant x par l'équation (44) et faisant les réductions

$$(68)\quad \left\{\begin{aligned} Y_1 &= -\alpha\sin\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \beta\cos\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) \\ &\quad + \frac{Nn}{BM} + \frac{D}{BM}y - X\sin\gamma + Y\cos\gamma, \end{aligned}\right.$$

D étant défini par l'équation (22).

On aura enfin

$$(69)\quad Z_1 = Z + \alpha X - \beta Y.$$

27. Soit d'ailleurs m la masse du point XYZ. La force vive totale Φ que possédera le solide C', à l'instant considéré t, sera égale à

$$(70)\quad \Phi = \sum m\frac{dX_1^2 + dY_1^2 + dZ_1^2}{dt^2},$$

la sommation s'étendant à tous les points du corps.

28. Prenons les dérivées des formules (67), (68) et (69), pour les substituer dans l'équation de Φ; il viendra

$$\begin{aligned}\Phi = \sum \Big\{ & m \Big[\frac{d\alpha}{dt}\cos\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \frac{d\beta}{dt}\sin\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) \\ & \qquad + \frac{1}{A}\frac{dn}{dt} - (+X\sin\gamma - Y\cos\gamma)\frac{d\gamma}{dt}\Big]^2 \\ & + m\Big[-\frac{d\alpha}{dt}\sin\gamma\left(\frac{1}{A'} - Z\right) - \frac{d\beta}{dt}\cos\gamma\left(\frac{1}{B'} - Z\right) \\ & \qquad + \frac{N}{BM}\frac{dn}{dt} + \frac{D}{BM}\frac{dy}{dt} - (X\cos\gamma + Y\sin\gamma)\frac{d\gamma}{dt}\Big]^2 \\ & \qquad\qquad + m\left(\frac{d\alpha}{dt}X - \frac{d\beta}{dt}Y\right)^2 + mR\Big\},\end{aligned}$$

R désignant un ensemble de termes du second degré au moins en α, β, n, y et contenant en outre des facteurs de la forme $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

L'amplitude des oscillations restant, par hypothèse, infiniment petite, α, β, n, y seront infiniment petits; le travail développé sera un infiniment petit du second ordre, ainsi que la force vive initiale; donc Φ sera un infiniment petit du second ordre.

Or R est du second ordre au moins; et, pour que Φ soit du second ordre, il est nécessaire que chacune des trois sommes de carrés qui figurent dans l'expression de Φ soit également infiniment petite du second ordre.

Or, pour que l'expression

$$\sum m\left(\frac{d\alpha}{dt}X - \frac{d\beta}{dt}Y\right)^2$$

soit du second ordre, il est évidemment nécessaire, ou que la masse du corps mobile soit sensiblement concentrée sur la droite unique, définie par l'équation

$$\frac{d\alpha}{dt}X - \frac{d\beta}{dt}Y = 0,$$

cas singulier que nous exclurons de notre examen, ou bien que $\frac{d\alpha}{dt}$ et $\frac{d\beta}{dt}$ soient infiniment petits du premier ordre au moins.

On verra de même, en considérant successivement les autres sommes qui figurent dans Φ, que $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{D}{BM}\frac{dy}{dt}$ doivent être infiniment petits, du premier ordre au moins.

Nous supposerons d'abord que, à l'instant t que l'on considère, D ait une valeur finie; $\frac{dy}{dt}$ sera infiniment petit du premier ordre.

29. Cela posé, soient GX′, GY′, GZ′ trois axes parallèles à OX, OY, OZ et passant par le centre de gravité G. Les coordonnées du point XYZ, par rapport à ces nouveaux axes, seront $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z - h$.

On aura, d'après les propriétés connues de centre de gravité,

$$\Sigma m X' = 0, \quad \Sigma m Y' = 0, \quad \Sigma m Z' = \Sigma m h = \mathfrak{M} h, \tag{71}$$

$\mathfrak{M}$ désignant la masse totale du corps mobile.

Nous poserons en outre, pour abréger,

$$\left\{ \begin{aligned} &\Sigma m (Y'^2 + Z'^2) = \mathcal{A}, \quad \Sigma m (Z'^2 + X'^2) = \mathcal{A}', \quad \Sigma m (X'^2 + Y') = \mathcal{A}'', \\ &\qquad \Sigma m Y'Z' = \mathcal{B}, \quad \Sigma m Z'X' = \mathcal{B}', \quad \Sigma m X'Y' = \mathcal{B}''. \end{aligned} \right. \tag{72}$$

30. Développons maintenant l'expression de Φ, après avoir remplacé X, Y, Z par X', Y', $Z' + h$; il viendra, en tenant compte des relations (71) et (72) ainsi que des valeurs de M et de N (formules 20 et 21),

$$\left\{ \begin{aligned} \Phi = {} & \left[\mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right)^2 + \mathcal{A}'\right]\frac{d\alpha^2}{dt^2} + \left[\mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right)^2 + \mathcal{A}\right]\frac{d\beta^2}{dt^2} + \mathcal{A}''\frac{d\gamma^2}{dt^2} \\ & + \mathfrak{M}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{N^2}{B^2M^2}\right)\frac{dn^2}{dt^2} + \mathfrak{M}\frac{D^2}{B^2M^2}\frac{dy^2}{dt^2} - 2\mathcal{B}''\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\beta}{dt} - 2\mathcal{B}\frac{d\alpha}{dt}\frac{d\gamma}{dt} \\ & - 2\mathcal{B}'\frac{d\beta}{dt}\frac{d\gamma}{dt} + 2\frac{\mathfrak{M}\cos\gamma}{M}\frac{A' - A}{A'}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{dn}{dt} \\ & - 2\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma}{M}\frac{B' - A}{B'}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\frac{d\beta}{dt}\frac{dn}{dt} - 2\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma\, D}{BM}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d\alpha}{dt}\frac{dy}{dt} \\ & - 2\frac{\mathfrak{M}\cos\gamma\, D}{BM}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\frac{d\beta}{dt}\frac{dy}{dt} + \frac{2\mathfrak{M} ND}{B^2M^2}\frac{dn}{dt}\frac{dy}{dt} + \rho, \end{aligned} \right. \tag{73}$$

ρ étant une expression du troisième ordre par rapport aux infiniment petits α, β, n, γ, $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$.

On a d'autre part (formule 41), pour l'expression du travail,

$$(74)\quad \left\{\begin{aligned} T &= -\mathfrak{M}(h_1 - h) \\ &= -\mathfrak{M}\left[\frac{1}{2}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\alpha^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\beta^2 + \frac{1}{2M}n^2 + \frac{D}{2M}y^2 + R\right], \end{aligned}\right.$$

R étant infiniment petit d'un ordre supérieur au second.

31. Cela posé, le mouvement sera déterminé par les formules de Lagrange,

$$(75)\quad \left\{\begin{array}{l} \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\dfrac{d\alpha}{dt}} - \dfrac{\partial\Phi}{\partial\alpha} = \dfrac{\partial T}{\partial\alpha}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots, \\ \dfrac{d}{dt}\dfrac{\partial\Phi}{\partial\dfrac{d\gamma}{dt}} - \dfrac{\partial\Phi}{\partial\gamma} = \dfrac{\partial T}{\partial\gamma}. \end{array}\right.$$

Effectuant les calculs, en négligeant les infiniment petits du second ordre, il viendra

$$(76)\quad a_1\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathfrak{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2} + c_1\frac{d^2n}{dt^2} + d_1\frac{d^2y}{dt^2} - \mathfrak{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right)\alpha,$$

$$(77)\quad -\mathfrak{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2} + a_2\frac{d^2\beta}{dt^2} + b_2\frac{d^2n}{dt^2} + c_2\frac{d^2y}{dt^2} - \mathfrak{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2} = -\frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right)\beta,$$

$$(78)\quad c_1\frac{d^2\alpha}{dt^2} + b_2\frac{d^2\beta}{dt^2} + a_3\frac{d^2n}{dt^2} + b_3\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}}{2M}n,$$

$$(79)\quad d_1\frac{d^2\alpha}{dt^2} + c_2\frac{d^2\beta}{dt^2} + b_3\frac{d^2n}{dt^2} + a_4\frac{d^2y}{dt^2} = -\frac{\mathfrak{M}D}{2M}y,$$

$$(80)\quad -\mathfrak{B}\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathfrak{B}'\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathfrak{A}''\frac{d^2\gamma}{dt^2} = 0.$$

en posant, pour abréger,

$$(81)\quad\begin{cases} a_1 = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right)^2 + \mathcal{A}', \quad c_1 = \frac{\mathfrak{M}\cos\gamma}{M}\frac{A' - A}{A}\left(\frac{1}{A'} - h\right), \\ \qquad\qquad d_1 = -\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma D}{BM}\left(\frac{1}{A'} - h\right); \\ a_2 = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right)^2 + \mathcal{A}, \quad b_2 = -\frac{\mathfrak{M}\sin\gamma}{M}\frac{B' - A}{B'}\left(\frac{1}{B'} - h\right), \\ \qquad\qquad c_2 = -\frac{\mathfrak{M}\cos\gamma D}{BM}\left(\frac{1}{B'} - h\right); \\ a_3 = \mathfrak{M}\left(\frac{1}{A^2} + \frac{N^2}{B^2M^2}\right), \quad b_3 = \frac{\mathfrak{M}ND}{B^2M^2}, \quad a_4 = \frac{\mathfrak{M}D^2}{B^2M^2}. \end{cases}$$

32. L'équation (80) peut s'intégrer immédiatement. Elle donne successivement

$$-\mathcal{B}\frac{d\alpha}{dt} - \mathcal{B}'\frac{d\beta}{dt} + \mathcal{A}''\frac{d\gamma}{dt} = \varepsilon,$$

ε étant une constante infiniment petite du premier ordre; puis

$$-\mathcal{B}\alpha - \mathcal{B}'\beta + \mathcal{A}''\gamma = \varepsilon t + k,$$

k étant une autre constante.

Comme on suppose que α et β restent toujours infiniment petits, on aura sensiblement

$$\gamma = \frac{\varepsilon t + k}{\mathcal{A}''},$$

et l'on pourra substituer cette valeur dans les sinus et cosinus qui figurent dans les coefficients $a_1, c_1, \ldots, a_4$. Cela fait, les équations (76) à (80) formeront un système d'équations linéaires dont les coefficients sont, les uns constants, les autres des fonctions périodiques du temps, à variations lentes.

On ne sait pas, en général, intégrer un semblable système; mais nous remarquerons que, tant que t ne sera pas devenu infiniment grand du premier ordre, εt sera négligeable; par suite, les coefficients $a_1, \ldots, a_4$ pourront être considérés comme constants. L'intégration pourra se faire, et les formules qu'elle donne resteront applicables à toute cette période du mouvement.

33. Cela posé, on va voir que, si $\frac{1}{A'} - h$, $\frac{1}{B'} - h$, M et D ne sont pas positifs [autrement dit, si les conditions (23) ne sont pas satisfaites], les valeurs de α, β, n, y, γ fournies par les intégrales des équations à coefficients constants croîtront indéfiniment pendant la période où ces équations sont applicables, résultat évidemment contradictoire avec l'hypothèse que les oscillations restent infiniment petites.

Les coefficients des équations (76) à (80) étant supposés constants, l'intégration de ce système dépendra, comme on sait, de la résolution de l'équation caractéristique

$$(82)\quad \begin{vmatrix} a_1 s^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{A'} - h\right) & -\mathfrak{B}'' s^2 & c_1 s^2 & d_1 s_2 & \mathfrak{B} s^2 \\ -\mathfrak{B}'' s^2 & a_2 s^2 + \frac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\frac{1}{B'} - h\right) & b_2 s^2 & c_2 s^2 & -\mathfrak{B}' s^2 \\ c_1 s^2 & b_2 s^2 & a_3 s^2 + \frac{\mathfrak{M}}{2M} & b_3 s^2 & 0 \\ d_1 s^2 & c_2 s^2 & b^3 s^2 & a_4 s^2 + \frac{\mathfrak{M} D}{2M} & 0 \\ \mathfrak{B} s^2 & -\mathfrak{B}' s^2 & 0 & 0 & \mathcal{A}'' s^2 \end{vmatrix} = 0.$$

Soient Δ ce déterminant, Δ_1, Δ_2, Δ_3, Δ_4 les déterminants plus simples obtenus en supprimant la dernière ligne et la dernière colonne, puis les deux dernières lignes et les deux dernières colonnes, etc. Considérons la suite

$$\Delta,\ \Delta_1,\ \Delta_2,\ \Delta_3,\ \Delta_4,\ 1.$$

On sait que, si un terme de cette suite s'annule, les deux termes entre lesquels il est compris seront de signe contraire [*]. Si donc on fait varier s^2 de $+\infty$ à $-\infty$, la suite ne pourra gagner ni perdre de variations que lorsque s^2 passera par une valeur qui annule Δ.

Or Δ, Δ_1, Δ_2. Δ_3, Δ_4 sont respectivement des polynômes des degrés 5, 4, 3, 2, 1 en s^2, et le coefficient du premier terme y est positif. En effet, le premier coefficient de Δ est le déterminant

$$\begin{vmatrix} a_1 & -\mathfrak{B}'' & c_1 & d_1 & \mathfrak{B} \\ -\mathfrak{B}'' & a_2 & b_2 & c_2 & -\mathfrak{B}' \\ c_1 & b_2 & a_3 & \mathfrak{b}_2 & 0 \\ d_1 & c_2 & \mathfrak{b}_3 & a_4 & 0 \\ \mathfrak{B} & -\mathfrak{B}' & 0 & 0 & \mathcal{A}'' \end{vmatrix},$$

[*] *Voir* LAURENT, *Traité de Mécanique*, p. 215 à 219.

qui n'est autre que le discriminant de la fonction positive Φ, quadratique par rapport aux variables $\frac{d\alpha}{dt}, \frac{d\beta}{dt}, \ldots, \frac{d\gamma}{dt}$. Les coefficients analogues dans $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$ s'en déduisent en supprimant une ligne et une colonne, deux lignes et deux colonnes, etc., et ne sont autres que les discriminants des fonctions $\Phi_1, \Phi_2, \ldots$, qui se déduisent de Φ en posant $\frac{d\gamma}{dt} = 0$, puis $\frac{d\gamma}{dt} = \frac{dy}{dt} = 0, \ldots$.

Si donc on fait $s^2 = +\infty$, la suite $\Delta, \Delta_1, \ldots, \Delta_4$, 1 ne présentera que des permanences. Si l'on pose $s^2 = -\infty$, on n'aura au contraire que des variations. On aura donc cinq variations gagnées; les cinq racines de l'équation en s^2 sont donc réelles.

Donnons maintenant à s une valeur positive très-petite. Les valeurs correspondantes de $\Delta, \Delta_1, \ldots, 1$ seront sensiblement

$$(83)\quad \begin{cases} \Delta = \mathcal{A}'' s^2 \dfrac{\mathfrak{M}D}{2M} \dfrac{\mathfrak{M}}{2M} \dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{B'} - h\right)\dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{A'} - h\right) \\ \Delta_1 = \dfrac{\mathfrak{M}D}{2M} \dfrac{\mathfrak{M}}{2M} \dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{B'} - h\right)\dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{A'} - h\right) \\ \Delta_2 = \dfrac{\mathfrak{M}}{2M} \dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{B'} - h\right)\dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{A'} - h\right) \\ \Delta_3 = \dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{B'} - h\right)\dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{A'} - h\right) \\ \Delta_4 = \dfrac{1}{2}\mathfrak{M}\left(\dfrac{1}{A'} - h\right) \\ 1 = 1 \end{cases}$$

Si les quantités $\frac{1}{A'} - h$, $\frac{1}{B} - h$, M, D ne sont pas toutes positives, cette suite présentera des variations, lesquelles indiqueront l'existence nécessaire de racines positives pour l'équation en s^2.

Soit s_1^2 la plus grande de ces racines positives. Les valeurs de α, β, n, y, γ, déduites de l'intégration des équations différentielles, contiendront, comme on sait, des termes de la forme $Ce^{s_1 t}$, où C est un multiplicateur constant, déterminé par les circonstances initiales du mouvement, et qui sera généralement un infiniment petit du premier ordre. Lorsque t croîtra, $e^{s_1 t}$ croîtra indéfiniment et beaucoup plus rapidement que lui, de telle sorte que $Ce^{s_1 t}$ deviendra très-grand, à une époque où, εt étant encore négligeable, on pourra traiter les équations (76) à (80) comme si leurs coefficients étaient constants.

34. Nous avons supposé, en établissant les équations différentielles (76) à (80) à coefficients périodiques, que D n'était pas sensiblement égal à zéro. Nous pouvions évidemment faire cette supposition pour démontrer l'instabilité de l'équilibre, car nous étions maîtres de disposer des conditions initiales du mouvement. D'ailleurs, tant que εt était négligeable, γ et par suite D ne devaient pas varier sensiblement si l'équilibre avait été stable. Donc D serait resté fini, comme il l'était à l'origine.

35. Mais, lorsque les conditions (23) sont satisfaites, auquel cas l'équilibre est stable, on peut se demander si les petites oscillations seront régies pendant toute la durée du mouvement par les équations à coefficients périodiques (76) à (80) établies dans l'hypothèse où D est une quantité finie.

On doit évidemment répondre par l'affirmative si $A' > B$, auquel cas le solide mobile peut tourner d'un angle quelconque sur l'appui; car on a vu que dans ce cas D est une quantité toujours positive et finie (**10**).

Mais il n'en est pas de même si $A' < B$, auquel cas D peut atteindre la valeur zéro, ou même la dépasser infiniment peu. On devra distinguer dans le mouvement trois périodes successives.

Première période : D fini et positif. Les équations (76) à (80) sont applicables; γ croîtra avec le temps (décroîtra si ε est négatif) d'une manière à peu près continue, mais avec une grande lenteur. Cependant, au bout d'un temps suffisamment considérable, γ se rapprochera de la valeur qui annule D, et la deuxième période commencera.

Deuxième période : D est infiniment petit, mais supérieur à sa valeur minimum. On ne sera plus en droit d'affirmer que $\frac{d\gamma}{dt}$ est infiniment petit. Il faudra donc compléter les équations différentielles du mouvement en y rétablissant les termes que cette hypothèse avait fait supprimer. Ces équations cesseront alors d'être linéaires.

Troisième période : Elle commencera lorsque l'angle γ aura atteint la limite extrême au delà de laquelle se produirait la pénétration mutuelle du solide mobile et de l'appui. A partir de ce moment, il se manifestera une résistance à l'accroissement ultérieur de γ, et le mouvement qui se produira sera le même que si le corps C′ était assujetti à conserver d'une manière constante cette orientation extrême, définie par l'équation (25). Cette équation permettra d'exprimer à chaque instant γ en fonction de x, y, x', y', ou des nouvelles variables α, β, n, y que nous leur avons substituées. Si l'on remplace γ par cette valeur dans l'expression de la force vive et du travail, ces quantités seront exprimées en fonction des seules variables α, β, n, y, et l'on obtiendra par la formule de Lagrange quatre équations différentielles entre ces variables.

Il pourrait se faire, d'ailleurs, que chacune des trois périodes que nous venons d'indiquer se produisît plusieurs fois dans la durée du mouvement.

Nous n'essayerons pas de former les équations du mouvement pour la deuxième et la troisième période. Les calculs, sans présenter, à ce qu'il semble, de difficultés sérieuses, seraient fort compliqués, et les équations fussent-elles formées, on ne pourrait guère espérer de les intégrer.

36. Nous nous bornerons à signaler, en terminant, deux cas intéressants, où les variables peuvent être choisies de telle sorte que les équations du mouvement deviennent linéaires à coefficients constants.

Le procédé le plus simple pour établir ces équations paraît être le suivant.

Considérons le mobile dans une quelconque de ses positions. On pourra l'amener de sa position initiale à celle-là par un double mouvement : 1° de rotation autour du centre de gravité; 2° de translation de ce centre.

La rotation peut se décomposer en trois autres, autour des axes GX′, GY′, GZ′, parallèles à OX, OY, OZ et mobiles avec le centre de gravité; soient β', α', γ' les amplitudes de ces rotations.

La translation peut de même être décomposée en trois autres, parallèles aux X, aux Y et aux Z, et dont nous représenterons les amplitudes par ξ, η, ζ.

Les oscillations restant infiniment petites, ξ, ζ, η, β', α' seront infiniments petits; mais, le corps pouvant changer d'orientation d'une manière notable, γ' pourra être fini.

Le point dont les coordonnées sont primitivement X, Y, Z aura pour coordonnées initiales, par rapport aux axes mobiles, $X' = X$, $Y' = Y$, $Z' = Z - h$.

Après les rotations infinitésimales β' et α', ces coordonnées seront devenues

$$X' - \alpha' Z', \quad Y' + \beta' Z', \quad Z' + \alpha' X' - \beta' \gamma'.$$

Après la troisième rotation γ', ces coordonnées seront

$$(84)\qquad \left\{\begin{aligned} X'_1 &= (X' - \alpha' Z')\cos\gamma' + (Y + \beta' Z')\sin\gamma',\\ Y'_1 &= -(X' - \alpha' Z')\sin\gamma' + (Y' + \beta' Z')\cos\gamma',\\ Z'_1 &= Z' + \alpha' X' - \beta' Y'.\end{aligned}\right.$$

Après les translations ξ, η, ζ, les coordonnées du même point, par rapport à OX, OY, OZ, seront

$$\begin{aligned} X_1 &= X'_1 + \xi = (X - \alpha' Z)\cos\gamma' + (Y + \beta' Z)\sin\gamma'\\ &\qquad + (\alpha'\cos\gamma' - \beta'\sin\gamma')h + \xi,\\ Y_1 &= Y'_1 + \eta = -(X - \alpha' Z)\sin\gamma' + (Y + \beta' Z)\cos\gamma'\\ &\qquad - (\alpha'\sin\gamma' + \beta'\cos\gamma')h + \eta,\\ Z_1 &= Z'_1 + h + \zeta = Z + \alpha' X - \beta' Y + \zeta.\end{aligned}$$

37. La comparaison de ces formules avec les formules (66) et (67 montre que l'on a

$$(85)\quad \alpha' = p\cos\gamma - q\sin\gamma - p' = Ax\cos\gamma - By\sin\gamma - A'x' = \alpha,$$

$$(86)\quad \beta' = -p\sin\gamma - q\cos\gamma + q' = -Ax\sin\gamma - By\cos\gamma + B'y' = \beta,$$

$$(87)\qquad \gamma' = \gamma,$$

$$(88)\qquad \xi = x - x'\cos\gamma - y'\sin\gamma - (\alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma)h,$$

$$(89)\qquad \eta = y + x'\sin\gamma - y'\cos\gamma + (\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma)h,$$

$$(90)\qquad \zeta = 0.$$

38. Cela posé, soient F_x, F_y, F_z la somme des composantes des forces qui agissent sur C'; μ_x, μ_y, μ_z leurs moments par rapport aux axes mobiles GX', GY', GZ'; le mouvement de translation sera déterminé par les trois équations

$$(91)\qquad \mathfrak{M}\frac{d^2\xi}{dt^2} = F_x,$$

$$(92)\qquad \mathfrak{M}\frac{d^2\gamma}{dt^2} = F_y,$$

$$(93)\qquad \mathfrak{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = F_z.$$

Pour déterminer, d'autre part, le mouvement de rotation, on aura les équations des aires

$$(94)\qquad \sum m\left(Y'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2} - Z'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2}\right) = \mu_x,$$

$$(95)\qquad \sum m\left(Z'_1\frac{d^2X'_1}{dt^2} - X'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2}\right) = \mu_y,$$

$$(96)\qquad \sum m\left(X'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2} - Y'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2}\right) = \mu_z.$$

39. Nous allons calculer les deux membres de chacune de ces équations, en supposant D fini.

On a vu que dans ce cas $\frac{d\alpha}{dt}$, $\frac{d\beta}{dt}$, $\frac{d\gamma}{dt}$, $\frac{dn}{dt}$, $\frac{dy}{dt}$ sont infiniment petits. Il en sera de même de $\frac{dx}{dt}$, $\frac{dx'}{dt}$, $\frac{dy'}{dt}$. En effet, x est déterminé par l'équation

$$n = Mx + Ny,$$

où M est une quantité finie et positive. En différentiant cette équation, on trouvera $\frac{dx}{dt}$ exprimé en fonction de quantités infiniment petites. On trouvera de même, en différentiant les équations (42) et (43), que $\frac{dx'}{dt}$ et $\frac{dy'}{dt}$ sont infiniment petits.

Cela posé, les équations (88), (89) et (90), étant différentiées deux fois, donneront, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\xi}{dt^2} = \mathfrak{M}\left[\frac{d^2x}{dt^2} - \frac{d^2x'}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma - \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2\beta}{dt^2}\sin\gamma\right)h\right],$$

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\eta}{dt^2} = \mathfrak{M}\left[\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{d^2x'}{dt^2}\sin\gamma - \frac{d^2y'}{dt^2}\cos\gamma + \left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\sin\gamma + \frac{d^2\beta}{dt^2}\cos\gamma\right)h\right],$$

$$\mathfrak{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0.$$

On trouvera de même, par la différentiation des équations (84), en négligeant le second ordre et remplaçant α', β', γ' par α, β, γ,

$$\sum m\left(Y'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2} - Z'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2}\right) = \sin\gamma\left(-\mathcal{A}'\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathcal{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathcal{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$$
$$+\cos\gamma\left(\mathcal{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathcal{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right),$$
$$\sum m\left(Z'_1\frac{d^2X'_1}{dt^2} - X'_1\frac{d^2Z'_1}{dt^2}\right) = \cos\gamma\left(-\mathcal{A}'\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathcal{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathcal{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right)$$
$$-\sin\gamma\left(\mathcal{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2} - \mathcal{A}\frac{d^2\beta}{dt^2} + \mathcal{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2}\right),$$
$$\sum m\left(X'_1\frac{d^2Y'_1}{dt^2} - Y'_1\frac{d^2X'_1}{dt^2}\right) = +\mathcal{B}\frac{d^2\alpha}{dt^2} + \mathcal{B}'\frac{d^2\beta}{dt^2} - \mathcal{A}''\frac{d^2\gamma}{dt^2}.$$

40. Passons au calcul de F_x, F_y, F_z, μ_x, μ_y, μ_z.

Le solide C′ est soumis à deux forces, son poids $\mathcal{M}g$ et la réaction $\mathcal{N}$ de l'appui, laquelle passe au point dont les coordonnées sont x, y, z, et dont les cosinus directeurs sont sensiblement égaux à $-p = -Ax$, $-q = -By$, 1.

On aura, par suite,

$$F_x = \mathcal{N}Ax,\quad F_y = -\mathcal{N}By,\quad F_z = \mathcal{N} - \mathcal{M}g;$$

mais on a

$$F_z = \mathcal{M}\frac{d^2\zeta}{dt^2} = 0,\quad \text{d'où}\quad \mathcal{N} = \mathcal{M}g$$

et, par suite,

$$F_x = -\mathcal{M}gAx,\quad F_y = \quad \mathcal{M}gBy.$$

D'autre part, le moment du poids par rapport aux axes mobiles sera nul, et ceux de la réaction Mg seront, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\begin{aligned}
\mu_x &= Mg(y-\eta) - MgByh\\
&= Mg[-x'\sin\gamma + y'\cos\gamma - (\alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma + By)h]\\
&= Mg[(A'h-1)x'\sin\gamma - (B'h-1)y'\cos\gamma],\\
\mu_y &= MgAxh - Mg(x-\xi)\\
&= Mg[-x'\cos\gamma - y'\sin\gamma - (\alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma + Ax]h\\
&= Mg[(A'h-1)x'\cos\gamma + (B'h-1)y'\cos\gamma],\\
\mu_z &= 0.
\end{aligned}$$

41. Les équations (91) et (92) deviendront donc

$$(97)\quad \frac{d^2x}{dt^2}-\frac{d^2x'}{dt^2}\cos\gamma-\frac{d^2y'}{dt^2}\sin\gamma-\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\cos\gamma-\frac{d^2\beta}{dt^2}\sin\gamma\right)h=-g\mathrm{A}x,$$

$$(98)\quad \frac{d^2y}{dt^2}+\frac{d^2x'}{dt^2}\sin\gamma-\frac{d^2y'}{dt^2}\cos\gamma+\left(\frac{d^2\alpha}{dt^2}\sin\gamma+\frac{d^2\beta}{dt^2}\cos\gamma\right)h=-g\mathrm{B}y.$$

Substituons, d'autre part, dans les équations (94) et (95), les valeurs trouvées pour leurs deux membres, puis ajoutons-les, après les avoir multipliées respectivement par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$; il viendra

$$(99)\qquad -\mathcal{A}'\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\mathcal{B}''\frac{d^2\beta}{dt^2}+\mathcal{B}\frac{d^2\gamma}{dt^2}=(\mathrm{A}'h-1)x'.$$

Ajoutons-les, d'autre part, après les avoir multipliées par $\cos\gamma$ et $-\sin\gamma$, il viendra

$$(100)\qquad \mathcal{B}''\frac{d^2\alpha}{dt^2}-\mathcal{A}\frac{d^2\beta}{dt^2}+\mathcal{B}'\frac{d^2\gamma}{dt^2}=-(\mathrm{B}'h-1)y';$$

enfin l'équation (96) devient

$$(101)\qquad \mathcal{B}\frac{d^2\alpha}{dt^2}+\mathcal{B}'\frac{d^2\beta}{dt^2}-\mathcal{A}''\frac{d^2\gamma}{dt^2}=0.$$

Les équations (97) à (101), jointes aux deux équations (42) et (43), détermineront complétement les variables x, y, x', y', α, β, γ.

42. Cela posé, si l'appui est de révolution, on aura $\mathrm{A}=\mathrm{B}$, et l'élimination de x, y, à l'aide des équations (42) et (43), donnera un système de cinq équations linéaires à coefficients constants pour déterminer les inconnues restantes. En effet, on a déjà trois de ces équations, à savoir (99), (100) et (101).

D'autre part, multiplions les équations (97) et (98) respectivement par $\cos\gamma$ et $-\sin\gamma$ et ajoutons-les, il viendra

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\gamma-\frac{d^2y}{dt^2}\sin\gamma-\frac{d^2x'}{dt^2}-h\frac{d^2\alpha}{dt^2}=-g\mathrm{A}(x\cos\gamma-y\sin\gamma);$$

mais on a, d'après (42),

$$x \cos\gamma - y \sin\gamma = \frac{A'x' + \alpha}{A};$$

d'où, en négligeant les infiniment petits du second ordre,

$$\frac{d^2x}{dt^2}\cos\gamma - \frac{d^2y}{dt^2}\sin\gamma = \frac{A'}{A}\frac{d^2x'}{dt^2} + \frac{1}{A}\frac{d^2\alpha}{dt^2}.$$

On obtient donc l'équation à coefficients constants

$$(102)\qquad \left(\frac{A'}{A} - 1\right)\frac{d^2x'}{dt^2} + \left(\frac{1}{A} - h\right)\frac{d^2\alpha}{dt^2} = -g(A'x' + \alpha).$$

Enfin, multipliant les équations (97) et (98) par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$ et ajoutant, il viendra de même, en tenant compte de (43),

$$(103)\qquad \left(\frac{B'}{A} - 1\right)\frac{d^2y'}{dt^2} - \left(\frac{1}{A} - h\right)\frac{d^2\beta}{dt^2} = -g(B'y' - \beta).$$

43. Le second cas remarquable est celui où l'on a les relations

$$(104)\qquad A' = B',\quad \frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}''} - \mathfrak{A}' = \frac{\mathfrak{B}'^2}{\mathfrak{A}''} - \mathfrak{A},\quad \frac{\mathfrak{B}\mathfrak{B}'}{\mathfrak{A}''} - \mathfrak{B}'' = 0.$$

Remplaçons x' et y' dans les équations (97) et (98) par leurs valeurs tirées de (42) et (43) et prenons en outre pour variables, à la place de α, β, les expressions

$$\alpha_1 = \alpha\cos\gamma - \beta\sin\gamma,$$
$$\beta_1 = \alpha\sin\gamma + \beta\cos\gamma.$$

L'équation (87) deviendra

$$(105)\qquad \left(1 - \frac{A}{A'}\right)\frac{d^2x}{dt^2} + \left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = -gAx.$$

L'équation (98) donnera de même

$$(106)\qquad \left(1 - \frac{B}{A'}\right)\frac{d^2y}{dt^2} - \left(\frac{1}{A'} - h\right)\frac{d^2\beta_1}{dt^2} = -gBy.$$

Éliminons d'autre part $\frac{d^2\gamma}{dt^2}$ des équations (99) et (100) à l'aide de l'équation (101) : il viendra, en tenant compte des relations (104) et posant, pour abréger, $\frac{\mathfrak{B}^2}{\mathfrak{A}''} - \mathfrak{A}' = \lambda$,

$$\lambda \frac{d^2\alpha}{dt^2} = (A'h - 1)x' = \frac{A'h-1}{A'}(Ax\cos\gamma - By\sin\gamma - \alpha),$$

$$\lambda \frac{d^2\beta}{dt^2} = -(A'h - 1)y' = \frac{A'h-1}{A'}(-Ax\sin\gamma - By\cos\gamma - \beta).$$

Multipliant ces équations par $\cos\gamma$ et $-\sin\gamma$ et ajoutant, il viendra

$$(107) \qquad \lambda \frac{d^2\alpha_1}{dt^2} = \frac{A'h-1}{A'}(Ax - \alpha_1).$$

Multipliant d'autre part par $\sin\gamma$ et $\cos\gamma$ et ajoutant, il viendra

$$(108) \qquad \lambda \frac{d^2\beta_1}{dt^2} = \frac{A'h-1}{A'}(-By - \beta_1).$$

On aura donc, pour déterminer x, y, α_1, β_1, les quatre équations (105) à (108), qui sont à coefficients constants.

44. Si le solide C' est de révolution (par sa constitution intérieure comme par sa forme extérieure), on aura

$$A' = B', \quad \mathfrak{A} = \mathfrak{A}'', \quad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}' = \mathfrak{B}'' = 0,$$

et les équations (104) seront identiquement satisfaites. Nous pouvons donc énoncer ce théorème :

Les oscillations infiniment petites seront régies par des équations à coefficients constants : 1° si l'appui est de révolution; 2° si le solide mobile est de révolution (à l'intérieur et à l'extérieur).