JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES

FONDÉ EN 1836 ET PUBLIÉ JUSQU'EN 1874

PAR JOSEPH LIOUVILLE

ÉLIE CARTAN

La Géométrie des groupes de transformations

Journal de mathématiques pures et appliquées 9e série, tome 6 (1927), p. 1-119.

<http://www.numdam.org/item?id=JMPA_1927_9_6__1_0>

JOURNAL

DE

MATHÉMATIQUES

PURES ET APPLIQUÉES.

La Géométrie des groupes de transformations;

PAR ÉLIE CARTAN.

INTRODUCTION.

Dans une Note récente présentée à l'Académie royale des Sciences d'Amsterdam [1], nous avons, M. J.-A. Schouten et moi, indiqué comment on pouvait attribuer à la variété d'un groupe fini et continu de transformations (chaque transformation du groupe étant représentée par un point de la variété) trois connexions affines remarquables, deux connexions sans courbure (désignées dans la Note par les signes $-$ et $+$), et une connexion sans torsion (désignée par le signe o). Ces trois connexions comportent les mêmes géodésiques, liées aux

[1] E. CARTAN en J. A. SCHOUTEN, *Over de meetkunde der groepuitgebreidheid van halfeenvoudige en eenvoudige groepen* (*Versl. Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam*, t. 35, 1926, p. 387-399). *Voir* aussi : *Over Riemannsche meetkunden, die een absoluut parallelisme toelaten* (*Versl. Kon. Akad. v. Wetensch. Amsterdam*, t. 35, 1926, p. 505-518). Ces deux Notes paraîtront prochainement en anglais dans les *Proceedings* de l'Académie.

sous-groupes à un paramètre du groupe donné. Les torsions des deux premières, égales et opposées, font intervenir les constantes de structure du groupe ; la courbure de la troisième fait intervenir certaines combinaisons de ces constantes. Les deux premières connexions sont du reste liées d'une manière très intime avec la théorie que j'ai proposée de la structure des groupes, fondée sur la considération de leurs équations de définition et non, comme celle de S. Lie, sur celle de leurs transformations infinitésimales.

Le présent Mémoire a pour but de développer et de compléter ce qui, dans la Note en question, n'est que brièvement esquissé. Pour plus de clarté j'ai repris toute la question. J'ai fait précéder l'étude infinitésimale des trois connexions affines d'un Chapitre consacré à l'étude des deux espèces d'équipollence qu'on peut définir dans un espace de groupe. Parmi les questions qui ne sont pas abordées dans la Note citée plus haut, ou qui n'y font l'objet que d'indications très vagues, je citerai la détermination des variétés totalement géodésiques d'un espace de groupe, celle du groupe d'isomorphie de l'espace sans torsion d'un groupe, rattachée à une première étude des espaces à connexion affine dans lesquels la courbure d'une facette se conserve par le transport parallèle. J'ai enfin, dans un dernier Chapitre, introduit et étudié une quatrième connexion, la connexion projective normale que définissent les géodésiques de l'espace.

Un des résultats les plus intéressants auxquels conduit l'étude d'ensemble qui va suivre est l'existence, dans la théorie des groupes finis et continus, à côté de l'isomorphisme classique, de deux autres isomorphismes, qu'on pourrait appeler l'*isomorphisme affine* et l'*isomorphisme projectif*, et qui résultent de la considération des propriétés de l'espace à connexion affine sans torsion et de l'espace à connexion projective normale attachés à un groupe. En particulier deux groupes de même ordre r sont affinement isomorphes si l'on peut choisir leurs transformations infinitésimales de base de manière que les constantes $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot s}$ qui entrent dans les relations

$$(X_i(X_j X_k)) = \sum_s c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot s} X_s f$$

soient les mêmes pour les deux groupes : on pourrait dire, en un certain sens, que les c_{ijk}^{s} définissent la *structure affine* d'un groupe. La *structure projective* est définie également par certaines fonctions, du reste plus compliquées, des constantes de structure de Lie. J'ai déterminé tous les groupes dont les constantes de structure affine, ou les constantes de structure projective, sont nulles.

Certains des résultats généraux obtenus deviennent particulièrement remarquables pour les groupes simples ou semi-simples, mais les théories sont développées pour les groupes généraux.

CHAPITRE I.

L'ESPACE D'UN GROUPE CONTINU ET SES DEUX PARALLÉLISMES.

I. — L'espace d'un groupe et ses deux systèmes d'équipollence.

1. Considérons un groupe de transformations fini et continu G à r paramètres $a_1, \ldots, a_r$. Les variables transformées par le groupe joueront dans la suite un rôle tout à fait accessoire. Nous désignerons par T_a la transformation du groupe correspondant aux paramètres $a_1, \ldots, a_r$, par $T_b T_a$ la transformation obtenue en effectuant successivement les transformations T_a et T_b, enfin par T_a^{-1} la transformation inverse de T_a. On sait que la transformation inverse de $T_b T_a$ est $T_a^{-1} T_b^{-1}$.

Nous pouvons regarder les paramètres $a_1, \ldots, a_r$ comme les coordonnées d'un point (a) dans un espace $\mathcal{E}$ à r dimensions, que nous appellerons *espace du groupe*. Pour le moment cet espace est un simple continuum; les propriétés du groupe vont nous permettre d'y introduire des notions géométriques.

Nous conviendrons de dire que le point qui correspond à la transformation identique du groupe est le point origine de l'espace. Comme on le verra dans la suite, ce point origine ne jouit d'aucune propriété géométrique spéciale.

Appelons *vecteur* de l'espace $\mathcal{E}$, et désignons par la notation $\overrightarrow{ab}$ l'ensemble de deux points (a) (point origine) et (b) (point extrémité)[1]. Un vecteur est *nul* quand son extrémité coïncide avec son origine.

2. Définition. — *Nous dirons que deux vecteurs $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{a'b'}$ sont équipollents de première espèce si l'on a*

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}; \tag{1}$$

nous dirons qu'ils sont équipollents de seconde espèce si l'on a

$$T_a^{-1} T_b = T_{a'}^{-1} T_{b'}. \tag{2}$$

On peut remarquer, en calculant les inverses des deux membres de chacune des égalités (1) et (2), que ces égalités peuvent encore s'écrire

$$T_a T_b^{-1} = T_{a'} T_{b'}^{-1}, \tag{1'}$$

$$T_b^{-1} T_a = T_{b'}^{-1} T_{a'}. \tag{2'}$$

De la définition précédente résultent immédiatement, pour chaque espèce d'équipollence, les propriétés suivantes :

1° *Tout vecteur équipollent à un vecteur nul est nul;*

2° *Tout vecteur est équipollent à lui-même;*

3° *Si un vecteur est équipollent à un second vecteur, le second est équipollent au premier;*

4° *Si deux vecteurs sont équipollents, les vecteurs opposés le sont aussi;*

---

(1) En Géométrie différentielle, spécialement dans la théorie des espaces à connexion affine (espaces de Riemann, de Weyl, etc.), le mot *vecteur* est pris dans un sens différent de celui du texte, un vecteur étant une grandeur géométrique attachée à un point (point origine) et définie analytiquement par r composantes (r étant le nombre de dimensions de l'espace). Mais il ne résultera dans la suite, de cette double acception du mot vecteur, aucune confusion possible, car quand nous doterons l'espace $\mathcal{E}$ d'une connexion affine, tout vecteur $\overrightarrow{ab}$ (au sens du texte) pourra, si le point (b) est dans un voisinage suffisamment petit du point (a), être identifié au vecteur (au second sens) qui a pour origine (a), qui est tangent en (a) à la ligne géodésique passant par (a) et (b), et dont la grandeur est définie par la longueur de l'arc ab de cette géodésique. Il y a du reste identité entre les deux sens quand les points (a) et (b) sont infiniment voisins.

5° *Tout point de l'espace est l'origine d'un vecteur et d'un seul équipollent à un vecteur donné;*

6° *Deux vecteurs équipollents à un troisième sont équipollents entre eux;*

7° *Si* $\overrightarrow{ab}$ *est équipollent à* $\overrightarrow{a'b'}$ *et* $\overrightarrow{bc}$ *à* $\overrightarrow{b'c'}$, *le vecteur* $\overrightarrow{ac}$ *est équipollent à* $\overrightarrow{a'c'}$.

Cette dernière propriété résulte de ce que les égalités

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}, \qquad T_c T_b^{-1} = T_{c'} T_{b'}^{-1}$$

entraînent

$$(T_c T_b^{-1})(T_b T_a^{-1}) = (T_{c'} T_{b'}^{-1})(T_{b'} T_{a'}^{-1})$$

ou

$$T_c T_a^{-1} = T_{c'} T_{a'}^{-1}.$$

Ces différentes propriétés rapprochent chacune des deux espèces d'équipollence de l'équipollence ordinaire de deux vecteurs.

3. Il existe une relation géométrique remarquable entre les deux espèces d'équipollence d'un espace de groupe. L'égalité (1)

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}$$

peut en effet s'écrire, en multipliant à gauche par T_b^{-1} et à droite par $T_{a'}$,

$$T_a^{-1} T_{a'} = T_b^{-1} T_{b'},$$

qui est de la forme (2). On en déduit le théorème suivant :

Théorème. — *Si* $\overrightarrow{ab}$ *est équipollent de première espèce à* $\overrightarrow{a'b'}$, *le vecteur* $\overrightarrow{aa'}$ *est équipollent de seconde espèce à* $\overrightarrow{bb'}$, *et réciproquement.*

La seconde équipollence pourrait donc se déduire *a priori* de la première.

Supposons plus généralement que dans un espace à r dimensions on ait défini d'une manière quelconque une équipollence satisfaisant aux propriétés 1° à 6°. On peut en déduire une seconde espèce d'équipollence en convenant que $\overrightarrow{aa'}$ est équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{bb'}$ si $\overrightarrow{ab}$ est équipollent de première espèce à $\overrightarrow{a'b'}$. On s'assure facilement que pour cette seconde espèce d'équipollence, les propriétés 1° à 5° sont vérifiées. Quant à la propriété 6°, elle ne l'est pas nécessairement. Supposons $\overrightarrow{aa'}$ et $\overrightarrow{bb'}$ équipollents de seconde espèce à $\overrightarrow{cc'}$; cela signifie que $\overrightarrow{ac}$ est équipollent de première espèce à $\overrightarrow{a'c'}$ et $\overrightarrow{bc}$ à $\overrightarrow{b'c'}$; pour que $\overrightarrow{aa'}$ et $\overrightarrow{bb'}$ soient équipollents de seconde espèce entre eux, il faut et il suffit que $\overrightarrow{ab}$ soit équipollent de première espèce à $\overrightarrow{a'b'}$; autrement dit, *la seconde équipollence jouira de la propriété 6° si la première jouit de la propriété 7°, et réciproquement.*

L'existence des propriétés 1° à 6° ponr chacune des deux équipollences conjuguées d'un espace entraîne donc pour chacune la propriété 7°.

4. Revenons à l'espace du groupe G. Les deux espèces d'équipollence sont en liaison étroite avec les deux *groupes des paramètres* de G.

Considérons en effet l'opération géométrique qui consiste à mener par un point variable (ξ) un vecteur $\overrightarrow{\xi\xi'}$ équipollent de première espèce à un vecteur fixe. Soit (a) l'extrémité du vecteur équipollent au vecteur fixe et mené par le point origine de l'espace. L'opération considérée se traduit analytiquement par

$$T_{\xi'} T_{\xi}^{-1} = T_a$$

ou

$$T_{\xi'} = T_a T_{\xi}; \tag{3}$$

elle est donc analytiquement identique à l'une des transformations du premier groupe des paramètres ([1]).

De même l'opération qui consiste à mener par un point variable (ξ) un vecteur $\overrightarrow{\xi\xi'}$ équipollent de seconde espèce à un vecteur fixe $\overrightarrow{Oa}$ se traduit analytiquement par

$$T_{\xi'} = T_{\xi} T_a; \tag{4}$$

([1]) S. Lie et G. Scheffers, *Vorlesungen über continuierliche Gruppen*, Leipzig, B. G. Teubner, 1893, p. 449. Cet ouvrage sera désigné dans la suite par Lie-Scheffers.

elle est donc analytiquement identique à l'une des transformations du second groupe des paramètres [1].

La propriété exprimée par le théorème du n° 3 est une traduction géométrique du fait que les transformations des deux groupes des paramètres sont échangeables entre elles.

Comme les formules (3) et (4) le mettent en évidence, les deux systèmes d'équipollence d'un espace de groupe sont en général distincts; ils ne seraient confondus que si toutes les transformations du groupe étaient échangeables entre elles.

5. Les propriétés énoncées au n° 2 sont caractéristiques des équipollences attachées aux groupes. Nous allons démontrer que *si dans un espace $\mathcal{E}$ on a défini une équipollence de vecteurs jouissant des sept propriétés considérées, l'espace $\mathcal{E}$ peut être regardé comme un espace de groupe, l'équipollence définie dans $\mathcal{E}$ étant la première équipollence attachée au groupe.*

Prenons en effet dans l'espace $\mathcal{E}$ un point origine (O), d'une manière tout à fait arbitraire. Soit (a) un point quelconque de $(\mathcal{E})$; considérons l'opération S_a par laquelle on passe d'un point variable (ξ) à l'extrémité (ξ') du vecteur $\overrightarrow{\xi\xi'}$ équipollent à $\overrightarrow{Oa}$ (vecteur qui existe d'après 5°). Je dis d'abord que ces opérations engendrent un groupe.

Elles contiennent évidemment l'opération identique (d'après 1°). Soient maintenant deux opérations S_a et S_b; soit (c) le transformé de (a) par S_b. En effectuant successivement les opérations S_a et S_b, nous passons du point (ξ) au point (ξ'), puis au point (ξ''), par

$$(S_a) \qquad \overrightarrow{\xi\xi'} = \overrightarrow{Oa},$$

$$(S_b) \qquad \overrightarrow{\xi'\xi''} = \overrightarrow{Ob}.$$

Or par hypothèse $\overrightarrow{(ac)}$ est équipollent à $\overrightarrow{Ob}$; donc $\overrightarrow{\xi'\xi''}$ est équipollent à $\overrightarrow{ac}$ (propriété 6°); les équipollences

$$\overrightarrow{\xi\xi'} = \overrightarrow{Oa}, \qquad \overrightarrow{\xi'\xi''} = \overrightarrow{ac}$$

[1] LIE-SCHEFFERS, p. 633.

entraînent donc (propriété 7°) :

$$\overrightarrow{\xi\xi''} = \overrightarrow{Oc};$$

par suite on a

$$S_b S_a = S_c. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Soit G le groupe engendré par les opérations S_a. Ce groupe est *simplement transitif;* cela veut dire qu'il contient une transformation et une seule amenant un point donné (ξ) en un autre point donné (ξ'), à savoir la transformation S_a correspondant à l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{Oa}$ équipollent à $\overrightarrow{\xi\xi'}$. Considérons alors deux vecteurs équipollents quelconques $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{a'b'}$; le vecteur $\overrightarrow{Oc}$ équipollent à $\overrightarrow{ab}$ est aussi équipollent à $\overrightarrow{a'b'}$ (propriété 6°); la transformation S_c amène donc simultanément (a) en (b) et (a') en (b'). Or la transformation $S_b S_a^{-1}$ amène aussi (a) en (b) [par l'intermédiaire de l'origine (O)], et la transformation $S_{b'} S_{a'}^{-1}$ amène également (a') en (b'); on a donc

$$S_c = S_b S_a^{-1} = S_{b'} S_{a'}^{-1},$$

ce qui montre bien l'identité de l'équipollence définie dans $\mathcal{E}$ et de l'équipollence de première espèce attachée au groupe G.

6. Il résulte du théorème précédent que l'équipollence de seconde espèce d'un espace de groupe peut être regardée comme une équipollence de première espèce attachée à un autre groupe admettant le même espace représentatif. Il est facile de voir que le *second groupe des paramètres* admettrait pour première équipollence la seconde équipollence du groupe G.

Voici une autre remarque importante. Considérons un ensemble de transformations T_a dépendant de r paramètres, *ne formant pas un groupe,* mais jouissant de la propriété que *les transformations* $T_b T_a^{-1}$ *ne dépendent que de r paramètres* (lorsque les a et les b prennent toutes les valeurs possibles). Nous pouvons définir, dans l'espace de cet ensemble de transformations, une équipollence de vecteurs par l'égalité

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}, \tag{1}$$

et cette équipollence, on le vérifie facilement, jouit des sept propriétés énoncées au n° **2**. Choisissons *une transformation origine* arbitraire T_0 ; la transformation S_a définie au numéro précédent se traduit analytiquement par

$$T_{\xi'} T_\xi^{-1} = T_a T_0^{-1}$$

ou

$$(S_a) \qquad T_{\xi'} = T_a T_0^{-1} T_\xi.$$

Effectuons successivement les transformations S_a et S_b, et soit

$$S_b S_a = S_c.$$

Nous aurons successivement, par S_a et S_b,

$$T_{\xi'} = T_a T_0^{-1} T_\xi,$$
$$T_{\xi''} = T_b T_0^{-1} T_{\xi'} = T_b T_0^{-1} T_a T_0^{-1} T_\xi = T_c T_0^{-1} T_\xi.$$

Il en résulte l'égalité

$$(T_b T_0^{-1})(T_a T_0^{-1}) = T_c T_0^{-1};$$

par suite les transformations $T_a T_0^{-1}$ *forment un groupe.*

Ce théorème, de nature purement analytique, peut du reste se démontrer directement. Considérons l'ensemble à r paramètres des transformations $T_b T_a^{-1}$; effectuons le produit de deux de ces transformations

$$(T_{b'} T_{a'}^{-1})(T_b T_a^{-1}).$$

Il existe une transformation T_c telle que l'on ait

$$(5) \qquad T_{a'}^{-1} T_b = T_{b'}^{-1} T_c;$$

en effet les transformations $T_b T_\xi^{-1}$, où l'on fait varier les paramètres ξ, doivent donner toutes les transformations de l'ensemble $T_\zeta T_\eta^{-1}$, par suite, en particulier, la transformation $T_{a'} T_{b'}^{-1}$; il existe donc un point (c) tel que l'on ait

$$T_b T_c^{-1} = T_{a'} T_{b'}^{-1},$$

égalité équivalente à l'égalité (5). On déduit alors de (5)

$$(T_{b'} T_{a'}^{-1})(T_b T_a^{-1}) = T_{b'} T_{b'}^{-1} T_c T_a^{-1} = T_c T_a^{-1},$$

ce qui montre bien que les transformations $T_b T_a^{-1}$ engendrent un groupe. Du reste toutes les transformations de ce groupe peuvent s'obtenir en laissant (a) fixe et en faisant varier (b).

7. On sait que deux groupes G et G′ de même ordre sont dits *isomorphes* (¹) si l'on peut établir entre leurs transformations une correspondance telle qu'au produit de deux transformations quelconques du premier groupe corresponde le produit des deux transformations correspondantes du second groupe. Dans la correspondance qui réalise l'isomorphisme, les transformations identiques se correspondent; de plus, à l'inverse d'une transformation du premier groupe correspond l'inverse de la transformation correspondante du second groupe.

Soient deux groupes isomorphes G et G′ et leurs deux espaces de groupes $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$. *Toute correspondance par isomorphisme des deux groupes se traduit par une correspondance ponctuelle des deux espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$, telle qu'à deux vecteurs équipollents de première (seconde) espèce de $\mathcal{E}$ correspondent deux vecteurs équipollents de première (seconde) espèce de $\mathcal{E}'$.*

En effet nous pouvons choisir les paramètres des deux groupes de manière que, dans la correspondance par isomorphisme considérée, les paramètres de deux transformations correspondantes soient les mêmes. Nous désignerons par les symboles T et Θ les transformations des deux groupes.

Cela posé, l'égalité

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1}$$

signifie qu'il existe une transformation T_c telle qu'on ait

$$T_b = T_c T_a, \qquad T_{b'} = T_c T_{a'};$$

il en résulte

$$\Theta_b = \Theta_c \Theta_a, \qquad \Theta_{b'} = \Theta_c \Theta_{a'};$$

d'où

$$\Theta_b \Theta_a^{-1} = \Theta_{b'} \Theta_{a'}^{-1}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

La démonstration serait la même pour le parallélisme de seconde espèce.

(¹) Il s'agit ici, comme du reste dans tout ce qui suit, de l'isomorphisme *holoédrique*.

8. Réciproquement, *supposons qu'on puisse établir entre les espaces $\mathcal{E}$ et $\mathcal{E}'$ de deux groupes* G *et* G′ *de même ordre r une correspondance ponctuelle telle qu'à deux vecteurs équipollents de première espèce de* $\mathcal{E}$ *correspondent deux vecteurs équipollents de première espèce de* $\mathcal{E}'$; *alors les deux groupes* G *et* G′ *sont isomorphes.*

Soit en effet (ω) le point de $\mathcal{E}'$ correspondant au point origine (O) de $\mathcal{E}$. Soient (a), (b), (c) trois points quelconques de $(\mathcal{E})$; (α), (β), (γ) les points correspondants de $(\mathcal{E}')$. L'égalité

$$T_b T_a^{-1} = T_c = T_c T_0^{-1}$$

entraîne par hypothèse

$$\Theta_\beta \Theta_\alpha^{-1} = \Theta_\gamma \Theta_\omega^{-1};$$

autrement dit, l'égalité

$$T_b = T_c T_a$$

entraîne

$$\Theta_\beta \Theta_\omega^{-1} = (\Theta_\gamma \Theta_\omega^{-1})(\Theta_\alpha \Theta_\omega^{-1}).$$

Faisons alors correspondre à la transformation T_a de G la transformation $\Theta_\alpha \Theta_\omega^{-1}$ de G′; cette correspondance, d'après l'égalité précédente, met en évidence l'isomorphisme des deux groupes.

On peut remarquer qu'il est très facile d'établir à l'intérieur d'un groupe donné une correspondance échangeant entre elles les deux espèces d'équipollence attachées au groupe : *il suffit de faire correspondre à la transformation* T_a *la transformation inverse* $T_\alpha = T_a^{-1}$; l'égalité

$$T_b T_a^{-1} = T_{b'} T_{a'}^{-1},$$

qui définit l'équipollence de première espèce, se change alors dans l'égalité

$$T_\beta^{-1} T_\alpha = T_{\beta'}^{-1} T_{\alpha'},$$

qui définit l'équipollence de seconde espèce.

Il résulte de cette remarque que *pour que deux groupes de même ordre soient isomorphes, il faut et il suffit qu'on puisse établir entre les espaces de ces deux groupes une correspondance ponctuelle transformant l'une des espèces d'équipollence du premier espace dans l'une quelconque des espèces d'équipollence du second.*

9. Les considérations précédentes posent la question de la détermination de toutes les transformations ponctuelles d'un espace de groupe en lui-même qui jouissent de la propriété de conserver les deux espèces d'équipollence de l'espace.

Il est d'abord évident qu'une transformation ponctuelle qui conserve l'équipollence de première espèce conserve l'équipollence de seconde espèce et réciproquement. Désignons en effet par (α), (β), etc. les points transformés de (a), (b), etc. L'équipollence de première espèce de $\overrightarrow{ab}$ et de $\overrightarrow{a'b'}$ entraînant par hypothèse celle de $\overrightarrow{\alpha\beta}$ et de $\overrightarrow{\alpha'\beta'}$, il en résulte (n° 3) que l'équipollence de seconde espèce de $\overrightarrow{aa'}$ et de $\overrightarrow{bb'}$ entraîne celle de $\overrightarrow{\alpha\alpha'}$ et de $\overrightarrow{\beta\beta'}$.

Commençons par déterminer les transformations ponctuelles qui conservent l'équipollence de première espèce et *qui laissent invariant le point origine*. L'égalité

$$T_c = T_b T_a$$

exprimant simplement l'équipollence de première espèce des vecteurs $\overrightarrow{Ob}$ et $\overrightarrow{ac}$, il en résultera l'équipollence de $\overrightarrow{O\beta}$ et $\overrightarrow{\alpha\gamma}$, et par suite l'égalité

$$T_\gamma = T_\beta T_\alpha;$$

les transformations cherchées sont donc les *auto-isomorphismes* du groupe G. Parmi ces auto-isomorphismes se trouvent en particulier les transformations du *groupe adjoint*

$$T_{\xi'} = T_a^{-1} T_\xi T_a, \tag{6}$$

où (a) est un point fixe. Si le groupe G est semi-simple, le groupe adjoint est le plus grand groupe continu des auto-isomorphismes de G [1].

Pour avoir toutes les transformations ponctuelles conservant l'équipollence de première espèce, il suffira de combiner les transformations ponctuelles précédentes avec les transformations

$$T_{\xi'} = T_\xi T_a \qquad \text{ou} \qquad T_{\xi'} = T_a T_\xi,$$

---

[1] E. CARTAN, *Le principe de dualité et la théorie des groupes simples et semi-simples* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 49, 1925, p. 363-364).

ou encore avec les transformations

$$(7) \qquad T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b,$$

(a) et (b) désignant deux points fixes. Les transformations ponctuelles (7) transforment en effet l'égalité

$$T_\eta T_\xi^{-1} = T_{\bar\eta} T_{\bar\xi}^{-1},$$

dans l'égalité

$$T_{\eta'} T_{\xi'}^{-1} = T_{\bar\eta'} T_{\bar\xi'}^{-1}.$$

Les transformations (7) forment évidemment un groupe Γ_0, lequel est un sous-groupe du groupe total Γ des transformations qui conservent l'équipollence de première espèce. Il est même facile de voir que Γ_0 *est un sous-groupe invariant de* Γ. Il suffit de démontrer que toute transformation de Γ_0 est changée en une autre transformation de Γ_0 par un auto-isomorphisme du groupe G. Si en effet les points (a'), (b'), (ξ'), (η') correspondent à (a), (b), (ξ), (η) par cet auto-isomorphisme, la relation

$$T_\eta = T_a T_\xi T_b$$

est changée en

$$T_{\eta'} = T_{a'} T_{\xi'} T_{b'};$$

la transformation de Γ_0 correspondant aux points (a) et (b) est changée dans une autre transformation de Γ_0, celle qui correspond aux points (a') et (b').

Nous donnerons au groupe Γ le nom de *groupe d'isomorphie de* $\mathfrak{G}$.

Le groupe des transformations ponctuelles de $\mathfrak{G}$ qui conservent l'ensemble des deux équipollences se déduit facilement de Γ en le combinant avec la transformation

$$T_{\xi'} = T_\xi^{-1}.$$

Remarquons que le groupe Γ_0 défini par les équations (7) est à $2r$ paramètres au plus; d'une manière précise, il est à $2r - \rho$ paramètres, ρ désignant l'ordre du sous-groupe formé des transformations de G échangeables avec toutes les autres transformations de G. Le groupe Γ_0 contient évidemment le groupe adjoint (6), qui est lui-même à $r - \rho$ paramètres.

II. — Géodésiques; les deux parallélismes; translations.

10. Dans l'équipollence ordinaire de deux vecteurs, les droites jouissent de la propriété caractéristique suivante :

Si l'on prend trois points quelconques (a), (b), (c) *sur une droite, le vecteur* $\overrightarrow{cd}$ *équipollent à* $\overrightarrow{ab}$ *a encore son extrémité* (d) *sur la droite.*

Nous allons chercher à généraliser cette notion dans un espace de groupe.

Définition. — *Une ligne* (C) *tracée dans un espace de groupe est dite géodésique de première espèce si, étant donnés trois points quelconques* (a), (b), (c) *sur cette ligne, l'extrémité* (d) *du vecteur* $\overrightarrow{cd}$ *équipollent de première espèce à* $\overrightarrow{ab}$ *est encore sur la ligne.*

On définirait de même les géodésiques de seconde espèce; mais il importe de remarquer immédiatement que *toute géodésique de première espèce est géodésique de seconde espèce et réciproquement.* En effet si $\overrightarrow{cd}$ est équipollent de première espèce à $\overrightarrow{ab}$, cela revient à dire que $\overrightarrow{bd}$ est équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{ac}$, et réciproquement. Il n'y a donc en réalité qu'une seule espèce de géodésiques.

11. La première question qui se pose est celle de l'existence des géodésiques. Or il est facile *a priori, dans un espace de groupe*, d'en trouver une infinité. Soit en effet (a) un point fixe; considérons un sous-groupe à un paramètre g du groupe G; désignons par Θ_u sa transformation générale. Le point (ξ) défini par

$$T_\xi = \Theta_u T_a \tag{8}$$

décrit une géodésique. Soient en effet u_1, u_2, u_3 trois valeurs particulières quelconques du paramètre u, et soient (ξ_1), (ξ_2), (ξ_3) les trois points correspondants. Soit enfin (ξ_4) l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{\xi_3\xi_4}$

équipollent de première espèce à $\overrightarrow{\xi_1 \xi_2}$; on a

$$T_{\xi_4} T_{\xi_3}^{-1} = T_{\xi_2} T_{\xi_1}^{-1}$$

ou

$$T_{\xi_4} = T_{\xi_2} T_{\xi_1}^{-1} T_{\xi_3} = \Theta_{u_2} \Theta_{u_1}^{-1} \Theta_{u_3} T_a = \Theta_{u_4} T_a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Réciproquement on obtient de cette manière toutes les géodésiques. Désignons en effet par (ξ), (η) deux points variables, par (a) un point fixe d'une géodésique. Il existe sur la géodésique un point (ζ) tel que

$$T_\eta T_\xi^{-1} = T_\zeta T_a^{-1};$$

par suite les transformations $T_\eta T_\xi^{-1}$ ne dépendent que d'un paramètre; il en résulte (n° **6**) que ces transformations, et, d'une manière plus spéciale, les transformations $T_\xi T_a^{-1}$, engendrent un sous-groupe à un paramètre g de G; en appelant Θ_u sa transformation générale, on a

$$T_\xi = \Theta_u T_a. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On peut remarquer que toute géodésique peut encore être définie par

$$T_\xi = T_a \Theta_u, \tag{9}$$

Θ_u engendrant un groupe à un paramètre, ou plus généralement par

$$T_\xi = T_a \Theta_u T_b. \tag{10}$$

Du reste l'égalité (10) peut s'écrire

$$T_\xi = (T_a \Theta_u T_a^{-1})(T_a T_b),$$

et la transformation $T_a \Theta_u T_\alpha^{-1}$ engendre un groupe, à savoir le groupe transformé de g par T_a; on retombe ainsi sur l'expression (8).

12. Nous avons regardé jusqu'à présent un vecteur $\overrightarrow{ab}$ comme défini uniquement par son origine (a) et son extrémité (b). Si les coordonnées de b ne diffèrent pas trop de celles de (a), la transformation $T_b T_a^{-1}$, d'après la théorie des groupes continus de S. Lie, appartient à un sous-groupe à un paramètre g de G, et à un seul; par suite les deux points (a) et (b) appartiennent à une géodésique et à une seule, lieu du point (ξ) défini par

$$T_\xi = \Theta_u T_a,$$

où Θ_u est la transformation générale de g. Rien n'empêche alors d'assimiler le vecteur au segment de géodésique limité par (a) et (b).

Nous pouvons dire alors que *tout vecteur porté sur une géodésique est équipollent à la fois de première et de seconde espèce à un vecteur déterminé porté sur la géodésique et ayant pour origine un point donné de cette géodésique.*

Si l'on définit sur une géodésique l'égalité de deux segments par l'équipollence des vecteurs correspondants, on peut *mesurer* les segments d'une même géodésique une fois qu'on a choisi sur cette géodésique un segment unité. En particulier, si l'on a pris pour paramètre u de la transformation générale de g le paramètre canonique de Lie, de telle sorte qu'on ait

$$\Theta_u \Theta_{u'} = \Theta_{u+u'},$$

la mesure du segment $\overrightarrow{\xi_1 \xi_2}$, où

$$T_{\xi_1} = \Theta_{u_1} T_a, \qquad T_{\xi_2} = \Theta_{u_2} T_a,$$

sera $|u_2 - u_1|$. Le changement permis de u en ku revient au changement de l'unité de longueur. Le *rapport* algébrique de deux vecteurs $\overrightarrow{\xi_1 \xi_2}$, $\overrightarrow{\xi_3 \xi_4}$, portés sur une même géodésique, a la valeur bien déterminée

$$\frac{u_4 - u_3}{u_2 - u_1}.$$

13. Si, par un point (b) extérieur à une géodésique (C) passant par (a), on mène les vecteurs équipollents de première espèce aux différents vecteurs portés sur (C), on obtient les vecteurs $\overrightarrow{b\eta}$ équipollents de première espèce aux vecteurs $\overrightarrow{a\xi}$ dont l'extrémité (ξ) décrit (c). Le point (η) décrit donc une ligne (C′), et cette ligne est une géodésique. Si l'on a

$$T_\xi = T_u T_a,$$

on en déduit

$$T_{\eta} = T_{u} T_{b}.$$

Nous dirons que (C') est *parallèle de première espèce* à (C) : tout vecteur porté sur (C') est équipollent de première espèce à un vecteur porté sur (C).

Deux géodésiques parallèles de première espèce à une troisième sont parallèles entre elles.

On définirait de même les géodésiques *parallèles de seconde espèce* à une géodésique donnée. Si celle-ci est définie par

$$T_{\xi} = T_{a} \Theta_{u},$$

on obtient les géodésiques définies par

$$T_{\eta} = T_{b} \Theta_{u},$$

où (b) est un point fixe arbitraire.

Nous avons donc ainsi défini deux espèces de parallélisme pour les géodésiques et, pour chacune de ces espèces, on a les propriétés suivantes :

1° *Toute géodésique est parallèle à elle-même ;*

2° *Deux géodésiques parallèles à une troisième sont parallèles entre elles ;*

3° *Par tout point pris hors d'une géodésique il passe une géodésique parallèle et une seule.*

Remarquons que les deux parallélismes permettent facilement de construire le vecteur $\overrightarrow{\xi\eta}$ équipollent de première (seconde) espèce à un vecteur donné $\overrightarrow{ab}$ et ayant une origine donnée (ξ) : il suffit de mener par (ξ) la géodésique parallèle de première (seconde) espèce à ab, puis par (b) la géodésique parallèle de seconde (première) espèce à $a\xi$; ces deux géodésiques se coupent au point (η) cherché.

14. Nous pouvons convenir de dire que deux géodésiques parallèles de première espèce ont *la même direction de première espèce*, et que deux géodésiques parallèles de seconde espèce ont *la même direction de seconde espèce*. Si l'on mène par le point origine la parallèle de première espèce à une géodésique donnée, les différents points de cette parallèle représentent les transformations d'un groupe g à un paramètre; nous pouvons donc dire que *toute direction de première espèce est définie par un sous-groupe à un paramètre de* G; il en est de même de toute direction de seconde espèce. Si l'on se donne un sous-groupe à un paramètre g de G et un point (a) de l'espace, on peut à partir du point (a) se déplacer, soit dans la direction de première espèce définie par g, soit dans la direction de seconde espèce définie par g, et l'on obtient ainsi en général deux géodésiques distinctes issues de (a).

15. Les équipollences de première et de seconde espèce permettent, comme on l'a fait au nº **12**, de définir l'égalité et par suite le *rapport* de deux segments portés sur deux géodésiques parallèles de première ou de seconde espèce. Si, sur une géodésique donnée, on choisit une unité de longueur, on pourra donc mesurer les segments sur toutes les géodésiques parallèles de première espèce à celle-là, puis sur toute géodésique parallèle de seconde espèce à une de ces dernières, et ainsi de suite. Supposons que la géodésique donnée parte du point origine et soit définie par un sous-groupe g de transformations Θ_u, u étant le paramètre canonique. Les géodésiques qui s'en déduisent par le processus indiqué sont des lieux de points (ξ) donnés par

$$T_\xi = T_a\, \Theta_u\, T_b,$$

(a) et (b) désignant deux points arbitraires fixes; en particulier, celles de ces géodésiques qui passent par le point origine sont données par

$$T_\xi = T_a\, \Theta_u\, T_a^{-1};$$

leurs directions sont définies par les différents sous-groupes homologues (gleichberechtigt) [1] *de g dans le groupe total* G. C'est seulement dans l'ensemble de ces directions que l'espace comporte une métrique intrinsèque.

16. Toute transformation ponctuelle du groupe d'isomorphie de

---

[1] LIE-SCHEFFERS, p. 474.

l'espace $\mathcal{E}$ change évidemment une géodésique en une géodésique, le rapport des segments étant conservé; elle change également deux géodésiques parallèles en deux géodésiques parallèles.

Considérons en particulier la transformation

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi;$$

par cette transformation, les différents points de l'espace décrivent des vecteurs équipollents (de première espèce) entre eux; de plus, tout vecteur est changé en un autre vecteur équipollent de seconde espèce au premier, et toute géodésique en une autre géodésique parallèle de seconde espèce. Nous pourrons donner à une telle transformation le nom de *translation de première espèce*. Ces translations sont les transformations du premier groupe des paramètres (n° **2**).

L'équation

$$T_{\xi'} = T_\xi T_a$$

définit de même une *translation de seconde espèce*.

La translation *continue* de première espèce

$$T_{\xi'} = \Theta_u T_\xi,$$

où Θ_u désigne une transformation arbitraire d'un groupe à un paramètre g (u jouant le rôle du temps), jouit de la propriété que les différents points de l'espace décrivent des géodésiques toutes parallèles entre elles de première espèce, pendant que les différentes géodésiques se déplacent en restant parallèles entre elles de seconde espèce. Nous donnerons à cette translation continue le nom de *translation géodésique de première espèce*. Nous définirons de même les *translations géodésiques de seconde espèce*.

III. — Les sous-groupes et les variétés totalement géodésiques.

17. Dans l'espace ordinaire, on peut définir un plan :

Soit comme une surface telle que tout vecteur ayant son origine sur la surface, et équipollent à un vecteur quelconque ayant son origine et son extrémité sur la surface, a également son extrémité sur la surface;

Soit comme une surface telle que toute droite (géodésique) qui y a deux de ses points y est contenue tout entière.

Dans un espace de groupe, nous pouvons partir de l'un ou l'autre des deux points de vue; mais *ils ne sont plus, en général, équivalents comme dans l'espace ordinaire.*

Nous appellerons variété totalement géodésique une variété telle que toute géodésique qui y a deux de ses points y est contenue tout entière.

Soit maintenant V_p une variété à p dimensions telle que tout vecteur $\overrightarrow{a\zeta}$ ayant son origine (a) sur V_p, et équipollent de première espèce à un vecteur quelconque $\overrightarrow{\xi\eta}$ ayant son origine et son extrémité sur V_p, ait également son extrémité (ζ) sur V_p. Si on laisse fixe le point (a) et que l'on fasse varier les points (ξ) et (η), on voit que la transformation $T_\eta T_\xi^{-1}$ peut toujours être ramenée à la forme $T_\zeta T_a^{-1}$, où (ζ) est un point de V_p. Par suite, l'ensemble à p paramètres des transformations T_ξ, lorsque (ξ) décrit V_p, jouit de la propriété que les transformations $T_\eta T_\xi^{-1}$ ne dépendent que de p paramètres. Donc (n° **6**), les transformations $T_\eta T_\xi^{-1}$, et, plus spécialement, les transformations $T_\xi T_a^{-1}$, engendrent un groupe g à p paramètres. Soit Θ_u la transformation générale de ce groupe; on voit que l'on a

$$T_\xi = \Theta_u T_a. \tag{11}$$

On retrouve donc, pour la variété V_p, une génération tout à fait analogue à celle des géodésiques. La réciproque est facile à démontrer.

La variété V_p ainsi obtenue est une variété totalement géodésique. En effet, si nous prenons sur V_p deux points suffisamment voisins (ξ) et (η), représentant deux transformations

$$T_\xi = \Theta_u T_a \qquad \text{et} \qquad T_\eta = \Theta_v T_a,$$

la transformation $T_\eta T_\xi^{-1} = \Theta_v \Theta_u^{-1}$ est de la forme Θ_w : le sous-groupe à un paramètre auquel elle appartient fait donc partie de g; par suite, tous les points de la géodésique joignant (ξ) à (η) sont sur la variété V_p, ce qu'il fallait démontrer.

Définition. — *Nous dirons qu'une variété totalement géodésique est de première catégorie si la géodésique menée par un point quelconque de la variété parallèlement (de première ou de seconde espèce) à toute autre géodésique de la variété appartient elle-même à la variété.*

Il est du reste indifférent que l'on considère le parallélisme de première ou de seconde espèce; on arrive dans le premier cas à la formule

$$T_\xi = \Theta_u T_a,$$

dans le second à la formule

$$T_\xi = T_a \Theta_u;$$

mais le second cas se ramène au premier, car on a

$$T_a \Theta_u = (T_a \Theta_u T_a^{-1}) T_a = \overline{\Theta}_u T_a,$$

$\overline{\Theta}_u$ engendrant un groupe à p paramètres.

Plus généralement, le point (ξ) défini par

$$T_\xi = T_a \Theta_u T_b,$$

où Θ_u engendre un groupe d'ordre p, décrit une variété totalement géodésique de première catégorie à p dimensions.

Nous verrons plus loin qu'il existe des variétés totalement géodésiques qui ne sont pas de première catégorie ; nous dirons qu'elles sont de seconde catégorie.

18. Si, par un point (b) extérieur à une variété V_p totalement géodésique de première catégorie, nous menons les géodésiques parallèles de première espèce aux différentes géodésiques tracées sur V_p, nous obtenons une autre variété géodésique de première catégorie à p dimensions, que nous dirons parallèle de première espèce à V_p. Si la première est le lieu du point (ξ) donné par

$$T_\xi = \Theta_u T_a,$$

la seconde est le lieu du point (η) donné par

$$T_\eta = \Theta_u T_b.$$

Deux variétés totalement géodésiques à p dimensions (de première catégorie) parallèles de première espèce à une troisième sont parallèles entre elles.

On définit de même les variétés totalement géodésiques de première catégorie parallèles de seconde espèce.

On peut dire que le sous-groupe g définit la *direction à p dimensions de première espèce* de la variété V_p définie par

$$T_\xi = \Theta_u T_a,$$

et qu'il définit la *direction à p dimensions de seconde espèce* de la variété V'_p définie par

$$T_\eta = T_a \Theta_u.$$

Les sous-groupes à un paramètre qui définissent les directions de première (seconde) espèce des géodésiques d'une variété totalement géodésique de première catégorie appartiennent au sous-groupe qui définit la direction à p dimensions de première (seconde) espèce de la variété.

19. Les deux variétés totalement géodésiques de première catégorie menées par un point (b) parallèlement, de première et de seconde espèce, à la variété

$$T_\xi = \Theta_u T_a,$$

sont définies respectivement par

$$T_\eta = \Theta_u T_b,$$
$$T_\zeta = T_b (T_a^{-1} \Theta_u T_a);$$

elles ne sont confondues que si, à chaque transformation Θ_u de g, on peut faire correspondre une transformation Θ_v telle qu'on ait

$$T_b T_a^{-1} \Theta_u T_a = \Theta_v T_b$$

ou

$$(T_a T_b^{-1})^{-1} \Theta_u (T_a T_b^{-1}) = \Theta_v.$$

Cette équation exprime que le groupe g, qui définit la direction de première espèce de la variété donnée, est invariant par la transformation $T_a T_b^{-1}$, ou encore par le groupe à un paramètre qui définit la direction de première espèce de la géodésique ab. On montrerait de même que le groupe d'ordre p qui définit la direction de seconde espèce de la variété donnée est invariant par le groupe à un paramètre qui définit la direction de seconde espèce de la même géodésique.

Si l'on veut que les deux variétés parallèles menées par (b) soient confondues, quel que soit le point (b), il faut et il suffit que le groupe g soit invariant dans le groupe total G; dans ce cas, du reste, les deux directions à p dimensions de la variété sont définies par le même sous-groupe invariant g.

Dans le cas général, on peut encore remarquer que la variété totalement géodésique de première catégorie V_p définie par

$$T_\xi = T_a \Theta_u T_b,$$

où Θ_u engendre un groupe g d'ordre p, est un espace du groupe g; les deux équipollences qui y sont définies en partant du groupe g sont les mêmes que celles qui sont définies dans tout l'espace ambiant en partant de G.

20. On peut encore généraliser un peu les considérations précédentes. Considérons deux variétés totalement géodésiques de la première catégorie, l'une V_p à p, l'autre V'_q à q dimensions. Soient g le groupe qui définit la direction de première espèce de la première variété, g' celui qui définit la direction de seconde espèce de la seconde variété; soient enfin Θ_u et Θ'_v leurs transformations. La variété W définie par

$$T_\xi = \Theta_u T_a \Theta'_v,$$

où (a) est un point fixe quelconque, jouit de la propriété que si, par un quelconque de ses points, on mène la variété totalement géodésique parallèle de première espèce à V_p et la variété totalement géodésique parallèle de seconde espèce à V'_q, ces deux variétés sont tout entières contenues dans W. Si, en effet, le point choisi est le point (ξ_0) défini par

$$T_{\xi_0} = \Theta_{u_0} T_a \Theta'_{v_0},$$

la variété totalement géodésique parallèle de première espèce à V_p est le lieu du point (η) défini par

$$T_{\eta} = \Theta_u T_{\xi_0} = \Theta_u \Theta_{u_0} T_a \Theta'_{v_0},$$

et ce point appartient manifestement à W. La démonstration est la même pour la seconde partie du théorème.

Il résulte de là que la variété W admet une génération par des variétés totalement géodésiques à p dimensions de première catégorie toutes parallèles entre elles de première espèce, ainsi qu'une génération par des variétés totalement géodésiques à q dimensions de première catégorie toutes parallèles entre elles de seconde espèce. Elle est en général à $p+q$ dimensions, mais ce nombre peut ne pas être atteint.

IV. — Interprétation cinématique.

21. On peut présenter tout ce qui précède sous une forme plus concrète, en quelque sorte cinématique [1]. Prenons pour exemple un groupe particulier, celui des déplacements euclidiens dans l'espace ordinaire à trois dimensions.

Considérons les ∞^6 positions que peut occuper un corps solide déterminé Σ; chacune de ces positions peut être regardée comme définissant un point dans un espace $\mathcal{E}$ à six dimensions. Choisissons arbitrairement une des positions Σ_0 du solide, que nous appellerons « position origine »; nous faisons correspondre à chaque position Σ le déplacement T qui amène Σ_0 en coïncidence avec Σ. L'espace $\mathcal{E}$ peut donc être regardé comme l'espace du groupe G des déplacements; le point origine correspond à la fois à Σ_0 et à la transformation identique de G.

Soient Σ_a et Σ_b deux positions de Σ, (a) et (b) leurs points représentatifs, T_a et T_b les déplacements qui amènent Σ_0 en Σ_a et en Σ_b. Le déplacement $T_b T_a^{-1}$ est celui qui amène Σ_a en Σ_b. Par suite, *deux vec-*

---

(1) *Cf.* E. CARTAN, *La structure des groupes de transformations et la théorie du trièdre mobile* (*Bull. Sc. math.*, 2e série, t. 34, 1910, p. 250-283). *Voir* aussi E. CARTAN, *Les récentes généralisations de la notion d'espace* (*Ibid.*, t. 48, 1924, p. 303-308).

teurs $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{a'b'}$ *de* $\mathcal{E}$ *sont équipollents de première espèce si c'est le même déplacement qui permet d'amener à la fois* Σ_a *sur* Σ_b *et* $\Sigma_{a'}$ *sur* $\Sigma_{b'}$. Ce déplacement est en général un déplacement hélicoïdal, défini par son axe Δ, son angle de rotation α et sa longueur de translation l.

Soient maintenant deux vecteurs $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{a'b'}$ équipollents de seconde espèce. Nous savons que $\overrightarrow{aa'}$, $\overrightarrow{bb'}$ sont équipollents de première espèce; par suite, c'est le même déplacement qui amène à la fois Σ_a sur $\Sigma_{a'}$ et Σ_b sur $\Sigma_{b'}$. On peut encore dire que la figure (Σ_a, Σ_b) est égale à la figure $(\Sigma_{a'}, \Sigma_{b'})$, ou, ce qui revient au même, que $\Sigma_{a'}$ est placé par rapport à $\Sigma_{b'}$ de la même manière que Σ_a est placé par rapport à Σ_b. Cela signifie enfin que *les deux déplacements hélicoïdaux qui amènent, le premier* Σ_a *sur* Σ_b, *le second* $\Sigma_{a'}$ *sur* $\Sigma_{b'}$, *ont même angle de rotation, même longueur de translation, et que l'axe* Δ *est placé par rapport à* Σ_b *comme* Δ' *par rapport à* $\Sigma_{b'}$. Pour deux observateurs placés de la même manière l'un par rapport à Σ_b (et Σ_a), l'autre par rapport à $\Sigma_{b'}$ (et $\Sigma_{a'}$), les deux déplacements qui amènent, l'un Σ_a sur Σ_b, l'autre $\Sigma_{a'}$ sur $\Sigma_{b'}$, sont les mêmes.

22. En se basant sur la définition du parallélisme de première espèce, on voit immédiatement qu'une géodésique de l'espace $\mathcal{E}$ s'obtient en prenant toutes les positions de Σ qui se déduisent de l'une d'entre elles par un même mouvement hélicoïdal *continu* (ou par une même translation rectiligne *continue*, ou par une même rotation *continue*).

Deux géodésiques sont parallèles de première espèce si les pas des deux mouvements hélicoïdaux correspondants sont les mêmes et si, de plus, les axes de ces deux mouvements occupent la même position *dans l'espace;* deux géodésiques sont parallèles de seconde espèce si les pas des deux mouvements hélicoïdaux sont les mêmes et si les axes de ces deux mouvements occupent la même position *dans le corps solide*.

On aura une variété totalement géodésique de première catégorie en prenant par exemple toutes les positions du solide qui se déduisent de l'une d'entre elles par une rotation quelconque autour d'un point fixe. Deux variétés de cette nature sont parallèles de première espèce si les deux centres de rotation correspondants occupent la même position *dans l'espace;* elles sont parallèles de seconde espèce si les deux centres occupent la même position *dans le corps.*

Un autre exemple est fourni par les positions du solide qui se déduisent de l'une d'entre elles par une translation quelconque; deux de ces variétés sont toujours parallèles à la fois de première et de seconde espèce; cela tient à ce que le sous-groupe des translations, qui définit leur direction à trois dimensions, est invariant.

23. On peut montrer, sur l'exemple choisi, l'existence de variétés totalement géodésiques de seconde catégorie. Considérons en effet un plan fixe Π, et les différentes positions du solide qu'on peut obtenir en effectuant sur une position donnée Σ_0 une rotation d'un angle quelconque autour d'une droite quelconque du plan Π. On obtient ainsi dans l'espace $\mathcal{E}$ une variété V_3 à trois dimensions. Soient Σ_1 et Σ_2 deux positions du solide correspondant à deux points quelconques de la variété; soit Δ_1 l'axe de la rotation qui amène Σ_0 en Σ_1, et soit α_1 l'angle de cette rotation; désignons par Δ_2 et α_2 les éléments correspondants pour Σ_2. Soit Π_1 le plan obtenu en faisant tourner Π autour de Δ_1 de l'angle $\frac{\alpha_1}{2}$; soit Π_2 le plan obtenu en faisant tourner Π autour de Δ_2 de l'angle $\frac{\alpha_2}{2}$. On passe de Σ_1 à Σ_0 par deux symétries successives par rapport à Π_1 et Π; on passe de Σ_0 à Σ_2 par deux symétries successives par rapport à Π et Π_2; par suite, on passe de Σ_1 à Σ_2 par deux symétries successives par rapport à Π_1 et Π_2, *c'est-à-dire par une certaine rotation autour de la droite* Δ *d'intersection de* Π_1 *et* Π_2.

La géodésique qui joint le point représentatif de Σ_1 à celui de Σ_2 s'obtiendra en effectuant sur Σ_1 une rotation autour de Δ d'un *angle variable;* une telle rotation pourra être regardée comme le résultat de deux symétries successives par rapport à deux plans contenant Δ, et l'on sait qu'on peut toujours choisir arbitrairement le premier de ces plans. Nous pouvons donc prendre le plan Π_1 et un plan arbitraire Π_3 contenant Δ, plan qui coupe Π suivant une droite Δ_3. Cela posé, la rotation considérée pourra se ramener aux quatre symétries par rapport aux plans

$$\Pi_1, \quad \Pi, \quad \Pi, \quad \Pi_3;$$

les deux premières feront passer de Σ_1 à Σ_0, et *les deux dernières effectueront sur Σ_0 une rotation autour de Δ_3*; elles conduiront donc à une position de Σ dont le point représentatif appartient à V_3. La variété V_3 jouissant de la propriété de contenir toute géodésique qui y a deux de ses points est *totalement géodésique*.

Mais *elle n'est pas de première catégorie*, car *les déplacements qu'on a effectués à partir de Σ_0 pour la définir ne forment pas un groupe*.

24. On aurait pu, pour définir les deux parallélismes dans l'espace $\mathcal{E}$ à six dimensions des positions du solide, se dispenser de choisir une position origine, en convenant *a priori* de dire que deux vecteurs $\overrightarrow{ab}$, $\overrightarrow{a'b'}$ sont équipollents de première espèce si les deux déplacements qui amènent respectivement Σ_a en Σ_b et $\Sigma_{a'}$ en $\Sigma_{b'}$ sont identiques. Cette manière de procéder a l'avantage de bien montrer que tous les points de l'espace jouent le même rôle et qu'il n'y a aucun point privilégié.

Inversement on aurait pu, en supposant que Σ soit un trièdre trirectangle, définir chaque position Σ_a de Σ par la transformation T_a de coordonnées obtenue en passant d'un trièdre fixe *oblique* au trièdre trirectangle Σ; ici les transformations T_a ne forment plus un groupe, mais cela n'a aucune importance : *l'essentiel, c'est l'ensemble des trièdres trirectangles et des déplacements qui les amènent les uns sur les autres*, c'est-à-dire c'est l'ensemble des transformations $T_b T_a^{-1}$ (*voir* n° **6**).

CHAPITRE II.

LES DEUX CONNEXIONS AFFINES SANS COURBURE D'UN ESPACE DE GROUPE.

I. — Transformations infinitésimales; variables canoniques.

25. Étant donné un espace de groupe, tout point infiniment voisin du point origine est défini analytiquement par une transformation infiniment petite du groupe.

On sait que toutes les transformations infinitésimales d'un groupe G à r paramètres se déduisent linéairement de r d'entre elles, que nous désignerons, avec S. Lie, par les symboles $X_1 f$, ..., $X_r f$. Toute transformation infinitésimale a pour effet de donner à une fonction f des variables un accroissement infiniment petit dont la partie principale est

$$(1) \qquad \delta t \sum_i e^i X_i f = \delta t \sum_{i,k} e^i \xi_{ik}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial f}{\partial x_k},$$

les coefficients e^i étant des constantes, l'indice k de sommation dans le second membre variant de 1 à n, nombre des variables transformées.

Toute transformation infinitésimale engendre un groupe à un paramètre, obtenu en intégrant les équations différentielles

$$(2) \qquad \frac{dx'_k}{dt} = \sum_{i=1}^{i=r} e^i \xi_{ik}(x'_1, \ldots, x'_n) \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

et en calculant la solution telle que, pour $t = 0$, les x'_i prennent les valeurs x_i. Dans les formules des transformations obtenues,

$$(3) \qquad x'_k = F_k(x_1, \ldots, x_n; t),$$

le paramètre est t; si l'on désigne par Θ_t la transformation générale du sous-groupe, on a

$$\Theta_t \Theta_{t'} = \Theta_{t+t'}.$$

Le point représentatif de Θ_t décrit une géodésique passant par le point origine (pour $t = 0$); de plus, le rapport de deux segments de cette géodésique, limités l'un par les points (t_1) et (t_2), l'autre par les points (t'_1) et (t'_2), est égal à

$$\frac{t_2 - t_1}{t'_2 - t'_1}.$$

Dans les formules (3), les fonctions F_k dépendent des coefficients e^i de la transformation infinitésimale génératrice; mais elles ne font intervenir évidemment que les r produits $e^1 t$, $e^2 t$, ..., $e^r t$. Toute transformation finie du groupe (suffisamment voisine de la transformation identique) est donc définie par les r quantités $e^i t$; comme les e^i ne sont définis qu'à un facteur près, rien n'empêche, pour une transformation finie donnée, de supposer $t=1$. Les formules

$$x'_k = F_k(x_1, \ldots, x_n; e^1, e^2, \ldots, e^r) \tag{4}$$

qui s'en déduisent sont les *équations canoniques* du groupe; $e^1, \ldots, e^r$ sont les *paramètres canoniques* de S. Lie [1].

Les variables canoniques jouent ici le même rôle que les *variables normales* de Riemann dans la théorie des espaces de Riemann [2]. Toute géodésique issue du point origine est représentée analytiquement par des équations linéaires

$$\frac{e^1}{m^1} = \frac{e^2}{m^2} = \ldots = \frac{e^r}{m^r},$$

les coefficients m^i étant des constantes. Si l'on regarde les e^i comme les coordonnées cartésiennes d'un point dans un espace ordinaire, toute géodésique issue du point origine est représentée par une droite issue de l'origine des coordonnées, et deux vecteurs équipollents portés sur cette géodésique sont représentés par deux vecteurs équipollents.

De même toute variété totalement géodésique passant par le point origine est représentée par une multiplicité plane.

26. Nous pouvons, à l'aide des paramètres canoniques de S. Lie, représenter une transformation finie du groupe par le même symbole que la transformation infinitésimale $\sum_i e^i X_i f$ qui l'a engendrée. Cela nous permet de dire que *les points de l'espace du groupe peuvent être rapportés à un repère cartésien ayant pour origine le point origine; le vecteur joignant l'origine à un point quelconque n'est autre que le vecteur* $\sum_i e^i X_i f$, *où l'on regarde les symboles* $X_1 f, \ldots, X_r f$ *comme représentant les vecteurs unitaires du repère cartésien considéré.*

Avec cette convention, le vecteur joignant l'origine à un point de

---

(1) LIE-SCHEFFERS, p. 454.

(2) *Voir* E. CARTAN, *La Géométrie des espaces de Riemann* (*Mémorial de Math.*, fasc. IX, 1925, p. 26).

l'espace est représenté par une des transformations infinitésimales génératrices du sous-groupe à un paramètre associé à la géodésique sur laquelle est porté le vecteur.

II. — La connexion affine sans courbure attachée à la première espèce d'équipollence.

27. Considérons la première espèce d'équipollence de l'espace du groupe. Attachons à chaque point de l'espace un repère cartésien équipollent (de première espèce) au repère que nous avons attaché au point origine. Nous l'appellerons « repère cartésien de première espèce ». Le vecteur $\overrightarrow{aa'}$ joignant un point (a) à un point infiniment voisin (a') est parallèle de première espèce au vecteur joignant le point origine au point représentatif de

$$T_{a'}T_a^{-1} = T_{a+da}T_a^{-1}.$$

Le vecteur $\overrightarrow{aa'}$, rapporté au repère attaché au point (a), a donc la même expression analytique que la transformation infinitésimale

$$T_{a+da}T_a^{-1};$$

soit

$$\varpi^1 X_1 f + \varpi^2 X_2 f + \ldots + \varpi^r X_r f$$

le symbole de cette transformation infinitésimale; les ϖ^i sont manifestement des expressions linéaires en $da_1, \ldots, da_r$, avec des coefficients fonctions des a_i. *Les r formes de Pfaff ϖ^i sont les coordonnées du point (a') rapporté au repère cartésien attaché au point (a).*

Le calcul des expressions ϖ^i se fait facilement si l'on connaît les équations finies du groupe G :

$$x'_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r).$$

Si l'on désigne par $x_i + dx_i$ ce que devient la variable x_i par la transformation $T_{a+da}T_a^{-1}$, on obtient dx_i en éliminant $\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n$ entre les deux systèmes d'équations

$$x_i = \Phi_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n; a_1, \ldots, a_r), \tag{5}$$

$$x_i + dx_i = \Phi_i(\overline{x}_1, \ldots, \overline{x}_n; a_1 + da_1, \ldots, a_r + da_r); \tag{6}$$

la transformation T_a^{-1} fait en effet passer des x_i aux $\overline{x}_i$, et la transformation T_{a+da} fait ensuite passer des $\overline{x}_i$ aux $x_i + dx_i$. On obtiendra des formules de la forme (¹)

$$(7) \qquad dx_i = \sum_{k=1}^{k=r} \varpi^k \xi_{ki}(x_1, \ldots, x_n)$$

avec

$$\varpi^k = \sum_{h=1}^{h=r} \Psi^{kh}\, da_h.$$

Si l'on désigne par f une fonction arbitraire des x_i, on aura

$$(8) \qquad df = \sum_{k=1}^{k=r} \varpi^k X_k f,$$

équation qui condense symboliquement les n équations (7).

28. La connaissance des r formes de Pfaff $\varpi^1, \ldots, \varpi^r$ permet de définir dans l'espace une *connexion affine*. On sait qu'un espace, à chaque point duquel on a attaché un repère cartésien, est doué d'une connexion affine si l'on s'est donné la loi qui permet de rapporter l'un à l'autre deux repères infiniment voisins (²); analytiquement, cette loi est déterminée :

1° Par la connaissance des coordonnées ω^i, par rapport au premier repère, de l'origine du repère infiniment voisin;

2° Par la connaissance des paramètres directeurs, par rapport au premier repère, des vecteurs de coordonnées du second repère, ou encore par la connaissance des quantités ω_i^j qui permettent d'exprimer les variations géométriques $d\mathbf{e}_i$ des vecteurs unitaires de coordonnées, rapportées au premier repère :

$$d\mathbf{e}_i = \sum_k \omega_i^k \mathbf{e}_k.$$

(¹) Ces formules constituent le premier théorème fondamental de S. Lie; *voir* par exemple LIE-SCHEFFERS, p. 371, équation (9).

(²) *Voir* E. CARTAN, *Sur les variétés à connexion affine et la relativité généralisée* (*Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. 40, 1923, p. 325-412).

Ici les repères attachés aux différents points étant équipollents entre eux, les composantes ω_i^j de la connexion affine sont toutes nulles; il ne reste que les composantes ϖ^i du vecteur joignant l'origine du premier repère à celle du repère infiniment voisin.

La connaissance de la connexion affine permet de développer toute courbe AB de l'espace sur l'espace affine tangent au point A; si la courbe est fermée (cycle), le repère attaché à A a subi un *déplacement affine;* le déplacement complémentaire qui le ramènerait à sa position initiale définit la *courbure* et la *torsion* de l'espace; la torsion se traduit par la translation qui ramènerait l'origine du repère à sa position initiale; la courbure se traduit par la *rotation affine* qui amènerait le repère, dans sa position finale, à être équipollent à sa position initiale.

Dans le cas qui nous occupe, *la courbure est nulle*, puisque, l'équipollence ayant une signification absolue, les repères attachés aux différents points de l'espace restent, dans le développement, équipollents entre eux. Il y a donc simplement une *torsion*.

29. Dans le cas général d'un espace dont la connexion affine a des composantes ω^i, ω_i^j quelconques, la torsion associée à un cycle élémentaire est définie analytiquement par les expressions

$$\Omega^i = (\omega^i)' - \sum_k [\omega^k \omega_k^i]; \tag{9}$$

la translation qui la représente est le vecteur

$$-\sum_i \Omega^i \mathbf{e}_i.$$

Quant à la courbure, elle est définie analytiquement par les formes

$$\Omega_i^j = (\omega_i{}^j)' - \sum_k [\omega_i^k \omega_k^j]. \tag{10}$$

Dans le cas présent, les formes ω_i^j étant identiquement nulles, la courbure est évidemment nulle, et la torsion se traduit par la translation représentée par le vecteur

$$-\sum_i (\varpi^i)' X_i f.$$

30. Le calcul de la torsion de l'espace revient à celui des covariants bilinéaires $(\varpi^i)'$. Or on peut remarquer que les équations (5), *où l'on regarde les $\bar{x}_i$ comme des constantes*, fournissent la solution générale du système d'équations aux différentielles totales (7), où les x_i sont regardées comme des fonctions inconnues de $a_1, \ldots, a_r$. Il résulte de là que le système (7) est *complètement intégrable*. Par suite, d'après un théorème classique, les covariants bilinéaires des seconds membres sont nuls si l'on tient compte des équations (7) elles-mêmes. On peut faire le calcul sur la forme condensée (8). On obtient

$$\sum_s X_s f (\varpi^s)' + \sum_k [d X_k f . \varpi^k] = 0\,;$$

en remplaçant $dX_k f$ par sa valeur obtenue en utilisant (8):

$$dX_k f = \sum_j \varpi^j X_j (X_k f),$$

on obtient

$$\sum_s X_s f (\varpi^s)' + \sum_{(jk)} [X_j(X_k f) - X_k(X_j f)] [\varpi^j \varpi^k] = 0.$$

Cette équation doit être une *identité*. Il en résulte, en posant avec Jacobi et S. Lie,

$$X_j(X_k f) - X_k(X_j f) = (X_j X_k),$$

qu'on doit avoir des équations de la forme [1]

$$(X_j X_k) = \sum_s c_{jk}{}^s X_s f \tag{11}$$

et

$$(\varpi^s)' = -\sum_{(jk)} c_{jk}{}^s [\varpi^j \varpi^k]. \tag{12}$$

---

[1] Les équations (11) traduisent analytiquement le *second théorème fondamental* de Lie (*voir* LIE-SCHEFFERS, p. 380).

Les coefficients c_{jk}^{s}, d'après (11), ne dépendent que de $x_1, \ldots, x_n$; d'après (12), ils ne dépendent que de $a_1, \ldots, a_r$; ce sont des *constantes,* que S. Lie appelle les *constantes de structure* du groupe.

Les formules (12) nous donnent donc la torsion de l'espace; la translation associée à un élément de surface orienté de l'espace est

$$-\sum_{s} (\varpi^s)' X_s f = \sum_{(jk), s} [\varpi^j \varpi^k] c_{jk}^{s} X_s f.$$

Si l'on prend, par exemple, un parallélogramme élémentaire dont le premier côté soit le vecteur

$$Uf = \sum_{i} \alpha^i X_i f,$$

et le second le vecteur

$$Vf = \sum_{i} \beta^i X_i f,$$

la translation associée à ce parallélogramme est

$$\sum_{(jk), s} (\alpha^j \beta^k - \alpha^k \beta^j) c_{jk}^{s} X_s f = (\Sigma \alpha^i X_i f, \Sigma \beta^i X_i f) = (UV).$$

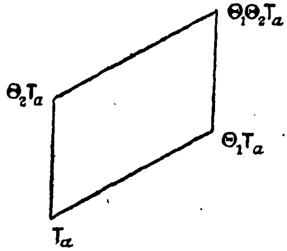
Par suite, *si l'on considère un cycle élémentaire formé d'un parallélogramme dont les deux côtés soient respectivement équipollents de première espèce aux vecteurs infiniment petits de symboles* Uf *et* Vf, *la translation associée à ce cycle se fait suivant un vecteur équipollent de première espèce au vecteur de symbole* (UV).

31. On peut démontrer directement ce résultat important, ce qui fournira une autre démonstration des formules (12). Considérons un point (a) correspondant à la transformation T_a et le cycle formé des quatre segments de géodésiques suivants :

$$\begin{gathered} T_a - \Theta_1 T_a, \\ \Theta_1 T_a - \Theta_1 \Theta_2 T_a, \\ \Theta_1 \Theta_2 T_a - \Theta_2 T_a, \\ \Theta_2 T_a - T_a. \end{gathered}$$

On a désigné par Θ_1 et Θ_2 deux transformations infiniment petites de symboles Uf, Vf. Le cycle ainsi obtenu est un *vrai* parallélogramme, le premier et le troisième côté étant équipollents de première espèce, le second et le quatrième équipollents de seconde espèce.

Fig. 1.



Quand on développe ce cycle sur l'espace affine tangent en (a), le premier segment de géodésique se développe suivant un segment de droite formant le vecteur Uf, le second suivant un vecteur représenté par le symbole de la transformation infinitésimale

$$(\Theta_1\,\Theta_2\,T_a)\,(\Theta_1\,T_a)^{-1} = \Theta_1\,\Theta_2\,\Theta_1^{-1};$$

le troisième segment fournira le vecteur $-Uf$ et le quatrième le vecteur $-Vf$. Finalement, la somme géométrique des quatre vecteurs fournis par le développement du cycle sera la différence entre le symbole de $\Theta_1\Theta_2\Theta_1^{-1}$ et Vf; la torsion sera donc représentée par la translation inverse.

Or, pour avoir le symbole de $\Theta_1\Theta_2\Theta_1^{-1}$, désignons par la lettre x les variables primitives, par x' les variables transformées par Θ_1^{-1}, par x'' les variables transformées des x' par Θ_2, et enfin par x''' les variables transformées des x'' par Θ_1. Nous voulons calculer la fonction $f(x'''_1, \ldots, x'''_n)$ au moyen de $f(x_1, \ldots, x_n)$. Pour cela, remplaçons d'abord les x''' en fonction des x''; nous obtenons une nouvelle fonction des x'' qui se déduit de $f(x''_1, \ldots, x''_n)$ par la transformation Θ_1 : c'est donc

$$f + Uf + \ldots;$$

pour exprimer cette fonction au moyen de $f(x'_1, \ldots, x'_n)$, nous la transformons par Θ_2, ce qui donne

$$f + Uf + Vf + V(Uf) + \ldots;$$

enfin, pour avoir son expression au moyen de $f(x_1, \ldots, x_n)$, nous la transformons par Θ_1^{-1}, ce qui donne

$$f + \mathrm{U}f + \mathrm{V}f + \mathrm{V}(\mathrm{U}f) - \mathrm{U}f - \mathrm{U}(\mathrm{V}f)\ldots = f + \mathrm{V}f - (\mathrm{UV}) + \ldots.$$

Il en résulte finalement que le symbole de la transformation $\Theta_1\Theta_2\Theta_1^{-1}$ est

$$\mathrm{V}f - (\mathrm{UV}).$$

Finalement, *la translation qui représente la torsion du cycle considéré est* (UV).

Si le cycle était supposé fini, et si $\mathrm{U}f$ et $\mathrm{V}f$ représentaient les deux transformations *finies* Θ_1 et Θ_2, la translation, comme on pourrait le démontrer, serait représentée exactement par le vecteur

$$(\mathrm{UV}) - \frac{1}{2}(\mathrm{U}(\mathrm{UV})) + \frac{1}{3!}\big(\mathrm{U}(\mathrm{U}(\mathrm{UV}))\big) - \ldots + \frac{(-1)^{n-1}}{n!}(\mathrm{U}^n\mathrm{V}) + \ldots,$$

en convenant de poser

$$(\mathrm{U}^n\mathrm{V}) = (\mathrm{U}(\mathrm{U}^{n-1}\mathrm{V})).$$

32. Il existe, dans tout espace à connexion affine, un théorème général de la conservation de la courbure et de la torsion, traduisant géométriquement les identités de Bianchi (¹). Dans le cas présent, la courbure n'existe pas et le théorème prend la forme suivante :

Si l'on considère un domaine à trois dimensions infiniment petit de l'espace et la surface qui le limite, la somme géométrique des vecteurs qui représentent les translations associées aux éléments de cette surface est nulle.

Analytiquement, le théorème se traduit en annulant la dérivée extérieure (²) des seconds membres des équations (12) et en y tenant compte de ces équations elles-mêmes (*identité fondamentale*). Le calcul donne tout simplement *les relations algébriques auxquelles doivent satisfaire les constantes c_{ik}^s pour qu'elles soient les cons-*

(¹) E. Cartan, *Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. 40, 1923, p. 373-375.

(²) *Voir* E. Cartan, *Leçons sur les invariants intégraux*, Paris, Hermann, 1922, p. 66-73.

tantes de structure d'un groupe (1):

$$\sum_s (c_{ij}^{\ s} c_{sk}^{\ h} + c_{jk}^{\ s} c_{si}^{\ h} + c_{ki}^{\ s} c_{sj}^{\ h}) = 0.$$

Ces relations sont aussi fournies par l'*identité de Jacobi*

$$((X_i X_j) X_k) + ((X_j X_k) X_i) + ((X_k X_i) X_j) = 0,$$

dont on voit ainsi la signification géométrique. On pourrait du reste essayer de la retrouver directement en prenant un parallélépipède convenable et lui appliquant le théorème de la conservation de la torsion.

Il est à remarquer ici que, l'espace admettant un parallélisme *absolu*, le théorème de la conservation de la torsion est vrai pour un domaine *fini* à trois dimensions quelconque.

33. Dans un espace à connexion affine quelconque, il existe un *groupe d'holonomie* engendré par les déplacements affines associés aux différents cycles issus d'un point de l'espace (2). Si tous ces déplacements sont des translations, le groupe est engendré par les translations infinitésimales associées aux cycles élémentaires; or toutes ces translations sont représentées par des symboles de la forme (UV). On sait que les crochets des différentes transformations infinitésimales d'un groupe engendrent aussi un groupe, le *groupe dérivé* (3). *Si le groupe dérivé est d'ordre $\rho \leq r$, le groupe d'holonomie est un groupe de translations à ρ paramètres s'effectuant dans la direction des transformations du groupe dérivé.*

---

(1) Ces relations constituent le troisième *théorème fondamental* de Lie (*voir* Lie-Scheffers, p. 395).

(2) E. Cartan, *Ann. Éc. Normale*, 3e série, t. 41, 1924, p. 1-25; *voir* aussi E. Cartan, *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* (*Acta math.*, t. 48, 1926, p. 1-42).

(3) S. Lie, *Leipz. Ber.*, 1888, p. 19.

III. — La connexion affine sans courbure attachée à la seconde espèce d'équipollence.

34. Nous allons maintenant attacher à chaque point de l'espace un repère cartésien équipollent *de seconde espèce* au repère cartésien du point origine. Les coordonnées cartésiennes d'un point (a'), infiniment voisin d'un point (a), seront, par rapport au repère attaché au point (a), les coefficients ω^i du symbole

$$\omega^1 X_1 f + \ldots + \omega^r X_r f$$

de la transformation infinitésimale $T_a^{-1} T_{a+da}$.

Nous aurons ainsi défini dans l'espace une seconde connexion affine, en convenant de regarder comme équipollents les vecteurs équipollents de seconde espèce.

Pour calculer les expressions de Pfaff ω^i, nous pouvons remarquer que la transformation $T_a^{-1} T_{a+da}$ est égale à $T_{a-da}^{-1} T_a$; quant au symbole de cette transformation infinitésimale, il est égal et opposé à celui de $T_{a+da}^{-1} T_a$, qui s'en déduit en changeant les signes des différentielles da_i.

Le calcul de $T_{a+da}^{-1} T_a$ se fait sans difficulté. Si nous connaissons les équations finies du groupe

$$x'_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r),$$

et si nous appelons $x_i + dx_i$ les variables transformées des x_i par la transformation $T_{a+da}^{-1} T_a$, nous aurons les dx_i en éliminant les $\bar{x}$ entre les deux systèmes d'équations

$$(13) \qquad \begin{cases} \bar{x}_i = \Phi_i(x_1, \ldots, x_n; a_1, \ldots, a_r), \\ \bar{x}_i = \Phi_i(x_1 + dx_1, \ldots, x_n + dx_n; a_1 + da_1, \ldots, a_r + da_r). \end{cases}$$

Ici l'élimination est toute faite et donne tout simplement

$$(14) \qquad \sum_k \frac{\partial \Phi_i}{\partial x_k} dx_k + \sum_\lambda \frac{\partial \Phi_i}{\partial a_\lambda} da_\lambda = 0 \qquad (i = 1, \ldots, n).$$

Soit maintenant f une fonction arbitraire des x_i; les équations aux différentielles totales (14) sont équivalentes à l'équation condensée

$$(15) \qquad df = -\omega^1 X_1 f - \omega^2 X_2 f - \ldots - \omega^r X_r f,$$

et cette équation est *complètement intégrable*, puisque l'intégrale des équations (14) est donnée par les premières formules (13), où les $\overline{x}_i$ sont des constantes d'intégration arbitraires.

En exprimant que l'équation (15) est complètement intégrable, on obtient, comme au n° **30**, d'abord les relations (11), puis les relations suivantes, analogues à (12) :

$$(16) \qquad (\omega^s)' = \sum_{(jk)} c_{jk}{}^s [\omega^j \omega^k].$$

35. Il ne sera peut-être pas mauvais de faire le calcul des formes ϖ^i et ω^i dans un cas particulier. Soit le groupe à deux paramètres

$$x' = ax + b.$$

Choisissons pour transformations infinitésimales de base

$$X_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x},$$

avec

$$(X_1 X_2) = -X_2 f.$$

Pour avoir les formes ϖ^1 et ϖ^2, il faut éliminer $\overline{x}$ entre les deux équations

$$x = a\overline{x} + b,$$
$$x + dx = (a + da)\overline{x} + b + db,$$

ce qui donne

$$dx = \frac{da}{a}x + db - b\frac{da}{a} = \frac{da}{a}X_1 x + \left(db - b\,\frac{da}{a}\right) X_2 x;$$

on a donc

$$\varpi^1 = \frac{da}{a}, \qquad \varpi^2 = db - b\frac{da}{a}.$$

Pour avoir les formes ω^1 et ω^2, il suffit d'annuler la différentielle de $ax + b$, ce qui donne

$$dx + \frac{da}{a}x + \frac{db}{a} = 0$$

ou

$$dx + \frac{da}{a} X_1 x + \frac{db}{a} X_2 x = 0.$$

On a donc

$$\omega^1 = \frac{da}{a}, \qquad \omega^2 = \frac{db}{a}.$$

On peut vérifier facilement les relations

$$(\varpi^1)' = 0, \qquad (\varpi^2)' = [\varpi^1 \varpi^2],$$
$$(\omega^1)' = 0, \qquad (\omega^2)' = -[\omega^1 \omega^2].$$

36. La torsion de l'espace doué de la seconde connexion affine est, pour un cycle élémentaire, donnée par le vecteur $-(\omega_i)'$. On en déduit immédiatement le théorème suivant :

Si l'on considère un cycle élémentaire formé d'un parallélogramme dont les deux côtés soient respectivement équipollents de seconde espèce aux vecteurs infiniment petits Uf *et* Vf, *la translation associée à ce cycle est équipollente de seconde espèce au vecteur* $-$ (UV).

On obtient donc une translation égale et opposée à celle que fournit la première connexion affine. Ce résultat, néanmoins, n'est pas si évident qu'il le paraît au premier abord, car *il ne s'agit pas ici du même parallélogramme* que dans le premier cas. Pour pouvoir comparer les résultats avec rigueur, il faut remarquer qu'un vecteur issu du point (a), et équipollent *de seconde espèce* au vecteur Uf issu du point origine, a pour extrémité le point $T_a \Theta_1$, en désignant par Θ_1 la transformation infinitésimale de symbole Uf; or on a

$$T_a \Theta_1 = (T_a \Theta_1 T_a^{-1}) T_a;$$

par suite le vecteur considéré est équipollent de première espèce au vecteur $\overline{\mathrm{U}}f$, en désignant par $\overline{\mathrm{U}}f$ la transformation transformée de Uf par T_a. Or on sait que si l'on pose

$$(\mathrm{U}\,\mathrm{V}) = \mathrm{W}f,$$

et si l'on transforme les transformations Uf, Vf, Wf en $\overline{\mathrm{U}}f$, $\overline{\mathrm{V}}f$,

$\overline{\mathrm{W}}f$, par une même transformation du groupe, on a encore

$$(\overline{\mathrm{U}}\,\overline{\mathrm{V}}) = \overline{\mathrm{W}}f.$$

Cela posé, la translation associée au cycle élémentaire dans la première connexion affine est (nº **30**) équipollente de première espèce au vecteur $\overline{\mathrm{W}}f$, donc équipollente de seconde espèce au vecteur $\mathrm{W}f$; elle est donc bien égale et opposée à celle qui lui est associée dans la seconde connexion affine.

En conclusion, *les deux connexions affines sans courbure de l'espace lui confèrent des torsions égales et opposées.*

37. On pourrait naturellement retrouver directement le résultat obtenu dans le numéro précédent en considérant les quatre points

$$\mathrm{T}_a, \quad \mathrm{T}_a\Theta_1, \quad \mathrm{T}_a\Theta_2\Theta_1, \quad \mathrm{T}_a\Theta_2$$

et les quatre segments de géodésiques qui les joignent les uns aux autres. Le développement du cycle de l'espace affine tangent en (a) donne :

Pour le premier côté, le vecteur $\mathrm{U}f$;
Pour le second côté, le vecteur $\mathrm{V}f + (\mathrm{UV})$ (transformation infinitésimale $\Theta_1^{-1}\Theta_2\Theta_1$);
Pour le troisième côté, le vecteur $-\mathrm{U}f$;
Pour le quatrième côté, le vecteur $-\mathrm{V}f$.

La translation associée au cycle, étant égale et opposée à la somme géométrique des quatre vecteurs précédents, est donc bien égale à $-(\mathrm{UV})$.

Le théorème de la conservation de la torsion donne ici le même résultat que précédemment, et le groupe d'holonomie relatif à la seconde connexion est le même que celui qui est relatif à la première.

38. La propriété démontrée au nº **10** que toute géodésique de première espèce est aussi géodésique de seconde espèce conduit à des résultats analytiques intéressants. On peut en effet définir une géodésique de première espèce comme une courbe qui conserve sa direction dans la première connexion affine; comme les repères cartésiens choisis sont tous équipollents entre eux, on aura toutes les géodésiques en intégrant les équations différentielles du premier ordre

$$(17) \qquad \frac{\varpi^1}{m^1} = \frac{\varpi^2}{m^2} = \ldots = \frac{\varpi^r}{m^r},$$

les m^i étant des constantes arbitraires.

D'autre part, les géodésiques de seconde espèce sont données de même par l'intégration des équations

$$(18) \qquad \frac{\omega^1}{n^1} = \frac{\omega^2}{n^2} = \ldots = \frac{\omega^r}{n^r},$$

les n^i étant des constantes arbitraires.

L'intégrale générale des équations (17) *est donc la même que celle des équations* (18).

Dans l'exemple du n° **35**, ces deux systèmes peuvent s'écrire respectivement

$$db - b\frac{da}{a} = m\frac{da}{a},$$

$$\frac{db}{a} = n\frac{da}{a},$$

et l'on vérifie facilement que, pour chacune des équations, la solution générale est de la forme $b = Ca + C'$. Du reste on peut ici se servir de ce résultat connu *a priori* pour supprimer toute intégration, car la deuxième équation donne $db = n\,da$, et, en portant dans la première, on obtient

$$b = na - m.$$

Des considérations analogues pourraient être développées dans le cas général.

Ajoutons que l'*élément d'arc* d'une géodésique est, à un facteur constant près, soit la valeur commune des rapports (17), soit la valeur commune des rapports (18).

IV. — Passage d'une des connexions affines sans courbure à l'autre.

39. Supposons que l'on connaisse les formes ϖ^i qui définissent la première connexion affine sans courbure de l'espace, supposé rapporté à des repères cartésiens de première espèce. Si l'on veut, en se servant de ces repères, définir la seconde connexion affine sans courbure, il faut déterminer les orientations mutuelles de ces repères dans cette seconde connexion.

On peut y arriver en utilisant les *translations* de première espèce de l'espace (n° **16**); considérons la translation infinitésimale par laquelle chaque point se déplace d'un vecteur infiniment petit équipollent de première espèce à un vecteur fixe $(e^1, e^2, \ldots, e^r)$; dans cette translation, toute géodésique se déplace en restant parallèle de seconde espèce à elle-même. Désignons par le symbole δ le déplacement correspondant à la translation et par le symbole d un déplacement arbitraire ; on a

$$\varpi^i(\delta) = e^i.$$

L'équation

$$(\varpi^s)' = -\sum_{(jk)} c_{jk}{}^s [\varpi^j \varpi^k] \tag{12}$$

est une forme condensée de l'équation

$$\delta\varpi^s(d) - d\varpi^s(\delta) = -\sum_{j,k} c_{jk}{}^s \varpi^j(\delta)\varpi^k(d).$$

Avec les conventions faites, et si nous posons

$$\varpi^s(d) = u^s,$$

nous obtenons, en remarquant que les e^i sont des constantes,

$$\delta u^s = -\sum_{j,k} c_{jk}{}^s e^j u^k. \tag{19}$$

Cette équation donne la variation subie par les composantes d'un vecteur (u^i) qui se déplace en restant équipollent de seconde espèce à lui-même, son origine subissant le déplacement infiniment petit (e^i).

Il résulte de là que les composantes de la seconde connexion affine sans courbure de l'espace, rapporté à des repères cartésiens équipollents entre eux de première espèce, sont les formes ϖ^i et

$$\varpi_i{}^j = \sum_k c_{ki}{}^j \varpi^k; \tag{20}$$

la formule générale qui exprime qu'un vecteur se déplace parallèlement à lui-même dans une connexion affine quelconque est en effet

$$\delta u^s + \sum_k u^k \omega_k^s = 0.$$

40. Il est facile d'après cela de calculer autrement qu'au n° **36** la torsion conférée à l'espace par la seconde connexion affine ; elle est donnée par les formes

$$-\Pi^s = -(\varpi^s)' + \sum_k [\varpi^k \varpi_k^s] = -\sum_{(jk)} c_{jk}{}^s [\varpi^j \varpi^k];$$

elle est effectivement égale et opposée à la torsion de la première connexion affine, comme nous l'avions vu, mais d'une manière moins directe, au n° **36**.

Il est également facile de vérifier que la seconde connexion affine, définie par les composantes (20), est sans courbure. On a en effet

$$\Pi_i^j = (\varpi_i^j)' - \sum_k [\varpi_i^k \varpi_k^j] = -\sum_{(\alpha\beta)} \left[\sum_k (c_{\alpha\beta}{}^k c_{ki}{}^j + c_{i\alpha}{}^k c_{k\beta}{}^j + c_{\beta i}{}^k c_{k\alpha}{}^j) \right] [\varpi^\alpha \varpi^\beta].$$

Or le coefficient de $[\varpi^\alpha \varpi^\beta]$ dans le troisième membre est nul d'après l'identité de Jacobi.

41. On peut enfin chercher à calculer les formes ω^i, connaissant les formes ϖ^i. Soit

$$\omega^i = \sum_k u_k^i \varpi^k;$$

le vecteur covariant dont les composantes sont $u_1^i, u_2^i, \ldots, u_n^i$ est fixe dans la seconde connexion affine; ses composantes v_s satisfont donc aux équations différentielles

$$dv_s - \sum_k v_k \varpi_s^k = 0$$

ou

$$dv_s + \sum_{k,h} c_{sh}{}^k v_k \varpi^h = 0. \qquad (21)$$

On cherchera r solutions indépendantes de ce système d'équations aux différentielles totales complètement intégrable, et à chacune d'elles on fera correspondre une forme $\omega = \Sigma v_k \varpi^k$.

Prenons l'exemple du n° **35** :

$$\varpi^1 = \frac{da}{a}, \qquad \varpi^2 = db - b\frac{da}{a}; \qquad c_{12}{}^2 = -1, \qquad c_{12}{}^1 = 0.$$

Le système (21) devient

$$dv_1 - v_2\left(db - b\frac{da}{a}\right) = 0,$$
$$dv_2 + v_2\frac{da}{a} = 0;$$

il s'intègre immédiatement et donne

$$v_1 = C\frac{b}{a} + C', \qquad v_2 = \frac{C}{a},$$

ce qui correspond à la forme générale

$$\omega = C\frac{db}{a} + C'\frac{da}{a}.$$

On peut achever de particulariser les formes ω^i, qui jusqu'à présent ne sont définies qu'à une substitution linéaire près à coefficients constants, en ajoutant la condition que, au point origine, les coefficients de ω^i aient les mêmes valeurs numériques que ceux de ϖ^i. On obtient ainsi, dans l'exemple précédent,

$$\omega^1 = \frac{da}{a}, \qquad \omega^2 = \frac{db}{a}.$$

42. Les équations (21) vont nous conduire à une autre conclusion intéressante. A la première connexion affine sans courbure est attaché un élément de volume de l'espace, défini à un facteur constant près, et qui est par exemple

$$d\tau_1 = \varpi^1\varpi^2\ldots\varpi^r;$$

de même à la seconde connexion affine sans courbure est attaché un élément de volume

$$d\tau_2 = \omega^1\omega^2\ldots\omega^r;$$

en choisissant comme nous l'avons fait les deux facteurs constants, l'élément de volume a la même valeur au point origine.

On peut se demander si ces deux définitions intrinsèques du volume dans l'espace du groupe sont les mêmes. Or il est évident qu'avec les notations du numéro précédent, on a

$$d\tau_2 = |u_i^j|\, d\tau_1 = \Delta\, d\tau_1,$$

Δ désignant le déterminant formé par r solutions indépendantes de l'équation (21).

On sait que ce déterminant satisfait à l'équation

$$\frac{d\Delta}{\Delta} + \sum_{h,i} c_{ih}{}^{i}\varpi^h = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{d\Delta}{\Delta} = \sum_{h,i} c_{hi}{}^{i}\varpi^h.$$

Il en résulte d'abord que la forme du second membre est une différentielle exacte, ce qui serait facile à vérifier par le calcul, ensuite que l'on a

$$\Delta = e^{\int \sum\limits_{h,i} c_{hi}{}^{i}\varpi^h},$$

l'intégration étant effectuée à partir du point origine.

En général donc les deux éléments de volume $d\tau_1$ et $d\tau_2$ sont différents.

L'équation

$$\sum_{h,i} c_{hi}{}^{i} e^h = 0$$

exprime que la transformation infinitésimale $\sum\limits_h e^h X_h f$ engendre un certain sous-groupe invariant à $r-1$ paramètres [1] (le premier membre de l'équation n'est autre que la somme des racines de l'équation caractéristique du groupe). A ce sous-groupe invariant sont associées ∞^r variétés V_{r-1}, totalement géodésiques de première catégorie; le déterminant Δ reste fixe quand on se déplace dans chacune de ces variétés.

Si chacune des sommes $\sum\limits_i c_{hi}{}^{i}$ est nulle, les deux éléments de

(1) *Voir* E. CARTAN, *Thèse*, p. 27, note.

volume $d\tau_1$ et $d\tau_2$ sont identiques : c'est ce qui se produit en particulier pour les groupes semi-simples.

43. Considérons un domaine à r dimensions de l'espace et effectuons sur ses différents points (ξ) une translation de seconde espèce définie par

$$T_{\xi'} = T_\xi T_a; \tag{22}$$

par cette translation tout vecteur est changé en un vecteur équipollent de première espèce; par suite, on a

$$\varpi^i(\xi; d\xi) = \varpi^i(\xi'; d\xi') \qquad (i = 1, \ldots, r). \tag{23}$$

Toute translation de seconde espèce conserve donc le volume de première espèce $\int d\tau_1$, *et de même toute translation de première espèce conserve le volume de seconde espèce* $\int d\tau_2$.

M. Hurwitz a indiqué une méthode permettant de former les invariants d'un groupe quand le volume total de l'espace du groupe est fini [1]. Soit $F(x_1, \ldots, x_n)$ une fonction arbitraire des variables ; faisons correspondre à chaque point (ξ) de l'espace la fonction F_ξ obtenue en effectuant sur les variables x la transformation T_ξ; la fonction

$$\Phi = \int F_\xi (d\tau_1)_\xi,$$

où l'intégrale est étendue à tout l'espace $\mathcal{E}$, est un invariant du groupe, comme on peut s'en rendre compte facilement.

44. Les équations (22) constituent l'intégrale générale des équations (23), où l'on regarde les ξ'_i comme des fonctions inconnues des ξ_i. Ces équations (23) sont donc complètement intégrables. Il est facile de le démontrer directement : les covariants bilinéaires des deux membres de ces équations sont en effet identiquement nuls quand on tient compte des équations elles-mêmes, et cela en vertu des équations (12) et de la propriété des c_{jk}^s d'être des *constantes*. Les équations (23) peuvent être regardées comme les *équations de définition*

[1] *Gött. Nachr.*, 1897, p. 71.

des transformations finies du second groupe des paramètres (22). De même les équations

$$\omega^i(\xi; d\xi) = \omega^i(\xi'; d\xi')$$

sont les équations de définition du premier groupe des paramètres.

La définition de chacun de ces groupes comme l'ensemble des transformations qui conservent un certain nombre d'expressions de Pfaff est susceptible, comme on le sait, de s'étendre à tous les groupes continus, finis ou infinis.

On peut remarquer que la connaissance des ϖ^i, c'est-à-dire des équations de définition du *second* groupe des paramètres, entraîne sans intégration la connaissance des transformations infinitésimales du *premier* groupe des paramètres. En effet toute transformation infinitésimale de ce groupe est une translation infinitésimale de première espèce; par suite, les coordonnées $(a_1, \ldots, a_r)$ d'un point quelconque y subissent des accroissements $(\delta a_1, \ldots, \delta a_r)$ tels que l'on ait

$$\varpi^i(a; \delta a) = e^i,$$

les e^i étant des constantes. Ces équations, résolues par rapport aux δa_i, donnent les transformations infinitésimales cherchées sous la forme

$$e^1 A_1 f + e^2 A_2 f + \ldots + e^r A_r f.$$

Il est facile de voir que l'on a symboliquement

$$df \equiv \varpi^1 A_1 f + \varpi^2 A_2 f + \ldots + \varpi^r A_r f.$$

Il résulte des considérations précédentes que l'intégration des équations (21) résout chacun des problèmes suivants :

Connaissant les équations de définition du second groupe des paramètres, déterminer ses transformations infinitésimales;

Connaissant les transformations infinitésimales du premier groupe des paramètres, déterminer ses équations de définition;

Connaissant les équations de définition du second groupe des paramètres, déterminer celles du premier;

Connaissant les transformations infinitésimales du premier groupe des paramètres, déterminer celles du second.

Tous ces problèmes sont équivalents.

V. — Propriétés caractéristiques d'une connexion affine sans courbure attachée à un groupe.

45. Considérons un espace à connexion affine sans courbure, c'est-à-dire en somme doué d'un parallélisme absolu. Si l'on attache aux différents points de l'espace des repères cartésiens équipollents entre eux (au sens de la connexion affine de l'espace), la connexion affine sera complètement définie par les r expressions de Pfaff ϖ^i qui donnent les coordonnées, par rapport au repère attaché à un point de l'espace, de tout point infiniment voisin. Ces r expressions ne sont *a priori* assujetties à aucune condition restrictive, de sorte que *l'espace le plus général à connexion affine sans courbure est défini analytiquement par r expressions de Pfaff linéairement indépendantes arbitraires.*

Les covariants bilinéaires $(\varpi^s)'$ peuvent toujours se mettre sous la forme

$$(\varpi^s)' = -\sum_{(jh)} c_{jh}{}^s [\varpi^j \varpi^h] \qquad (s = 1, \ldots, r),$$

de sorte que les coefficients $c_{jk}{}^s$ définissent analytiquement la torsion de l'espace.

Il est facile de voir que, dans un espace à connexion affine sans courbure, on peut définir une équipollence de vecteurs satisfaisant aux conditions 1°-6° du n° **2**. Définissons d'abord les *géodésiques* comme des courbes qui ont partout la même direction, c'est-à-dire comme les solutions des équations différentielles

$$(17) \qquad \frac{\varpi^1}{m^1} = \ldots = \frac{\varpi^r}{m^r},$$

les m^i étant des constantes. Cela posé, si l'on donne aux m^i des valeurs *fixes*, les équations (17) définissent une congruence de géodésiques telle qu'il en passe une et une seule par tout point de l'espace; nous pouvons convenir de dire que ces géodésiques sont toutes parallèles entre elles, puisque deux vecteurs infiniment petits pris, l'un sur l'une de ces géodésiques, l'autre sur une autre, sont parallèles au sens de la connexion affine de l'espace. Nous conviendrons enfin de dire que deux vecteurs pris sur deux géodésiques de la congruence sont *équipollents* si, étendue aux deux segments de géodésiques qu'ils déterminent, l'intégrale

$$\int \frac{\varpi^1}{m^1} = \int \frac{\varpi^2}{m^2} = \ldots = \int \frac{\varpi^r}{m^r}$$

a la même valeur numérique.

On démontre sans difficulté que l'équipollence de vecteurs ainsi définie satisfait aux six conditions 1°-6° du n° **2**.

Remarquons en passant que *toute équipollence satisfaisant à ces six conditions ne peut pas être obtenue par la méthode infinitésimale précédente*, parce que l'existence de géodésiques, telles qu'elles ont été définies au n° **10**, ne découle pas nécessairement de ces six conditions, comme on en donnerait facilement des exemples.

46. Nous allons nous proposer de caractériser de différentes manières *les espaces à connexion affine sans courbure qui peuvent être regardés comme des espaces de groupes.*

Une première propriété caractéristique est la constance des composantes $c_{jk}{}^s$ de la torsion. Géométriquement cela veut dire que *les translations associées à deux cycles élémentaires équipollents sont elles-mêmes équipollentes.* Démontrons que cette propriété caractérise les connexions affines sans courbure des espaces de groupes.

Si en effet les coefficients $c_{jk}{}^s$ sont des constantes, les équations de Pfaff

$$\varpi^s(a'; da') = \varpi^s(a; da), \tag{24}$$

où les a' sont des fonctions inconnues des a, sont complètement intégrables, puisque les covariants bilinéaires des deux membres

$$-\sum_{(jk)} c_{jk}{}^s(a')[\varpi^j(a'; da')\varpi^k(a'; da')]$$

et

$$-\sum_{(jk)} c_{jk}{}^s(a)[\varpi^j(a; da)\varpi^k(a; da)]$$

sont égaux en tenant compte des équations (24). La solution générale

$$a'_i = f_i(a_1, \ldots, a_r; C_1, \ldots, C_r)$$

des équations (24), avec r constantes d'intégration $C_1, \ldots, C_r$, définit donc le groupe G simplement transitif à r paramètres des transformations qui laissent invariantes les formes ϖ^s. Donnons-nous arbitrairement dans l'espace un point (a_0) et faisons correspondre à chaque point (a) la transformation T_a du groupe G qui amène le point (a_0) en coïncidence avec le point (a). Cela posé, les équations (24) qui expriment l'équipollence de deux vecteurs infiniment petits $\overrightarrow{a, a + da}$ et $\overrightarrow{a', a' + da'}$, signifient que la transformation de G qui amène (a) en (a') amène aussi $(a + da)$ en $(a' + da')$, autrement dit qu'on a

$$T_{a'}T_a^{-1} = T_{a'+da'}T_{a+da}^{-1},$$

ou enfin

$$T_a^{-1}T_{a+da} = T_{a'}^{-1}T_{a'+da'}.$$

L'équipollence de l'espace est donc la seconde équipollence attachée au groupe G.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Pour qu'une connexion affine sans courbure soit attachée à un groupe, il faut et il suffit que la torsion d'un cycle élémentaire se conserve quand on transporte ce cycle par parallélisme (1).

47. Considérons, dans un espace à connexion affine sans courbure, la transformation ponctuelle infinitésimale (translation) par laquelle les différents points se déplacent de vecteurs équipollents. Dans un espace de groupe, une telle transformation ponctuelle laisse invariante la connexion affine de l'espace, c'est-à-dire change deux vecteurs équipollents en deux vecteurs équipollents. Nous allons démontrer la réciproque.

Soient $e^1, \ldots, e^r$ les composantes du vecteur infiniment petit que décrit chaque point de l'espace ; le calcul fait au n° **39** nous montre que tout vecteur $(u^1, \ldots, u^r)$ devient, par la translation, un nouveau vecteur de

(1) L'espace d'un groupe, considéré comme un espace à connexion affine sans courbure, appartient à la classe très importante des espaces dans lesquels la courbure et la torsion d'un cycle se conservent quand on transporte ce cycle par parallélisme. Il sera question plus loin de ceux de ces espaces dont la torsion est nulle.

composantes

$$u^s - \sum_{j,k} c_{jk}{}^s e^j u^k.$$

Si alors deux vecteurs équipollents issus de deux points différents restent équipollents, c'est que, aux deux points considérés, les quantités $\sum_{j,k} c_{jk}{}^s e^j u^k$ ont les mêmes valeurs numériques, et cela quels que soient les e^j et les u^k. *Il en résulte que les coefficients $c_{jk}{}^s$ sont des constantes.*

Convenons de dire qu'une transformation ponctuelle est *isomorphique* quand elle conserve la connexion affine de l'espace. Nous arrivons au théorème suivant :

Pour qu'une connexion affine sans courbure soit attachée à un groupe, il faut et il suffit que les translations (dans lesquelles les différents points de l'espace décrivent des vecteurs équipollents) *soient des transformations isomorphiques.*

48. Dans un espace à connexion affine sans courbure, les translations permettent de définir une seconde connexion affine de l'espace, en ce sens que deux vecteurs issus de deux points infiniment voisins seront regardés comme parallèles s'ils se déduisent l'un de l'autre par la translation qui amène le premier point sur le second. Dans un espace de groupe, cette seconde connexion affine est encore sans courbure. Nous allons démontrer la réciproque.

En effet, si la seconde connexion affine est sans courbure, nous avons dans l'espace deux systèmes d'équipollence jouissant l'un et l'autre des propriétés 1° à 6° du n° **2**. D'autre part, toute géodésique de la première connexion affine reste géodésique dans la seconde connexion, puisque si l'on imprime au vecteur $\overrightarrow{aa'}$, qui joint deux points infiniment voisins d'une géodésique, la translation qui amène a en a', le vecteur reste équipollent à lui-même de seconde espèce, par définition de cette équipollence, et que d'autre part il reste aussi équipollent de première espèce, par définition des géodésiques. Cela posé, si nous prenons un segment infiniment petit de géodésique $\overrightarrow{aa'}$

et que nous lui imprimions la translation qui amène (a) en (b), il deviendra un segment $\overrightarrow{bb'}$ équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{aa'}$; le segment $\overrightarrow{a'a''}$ équipollent à $\overrightarrow{aa'}$ deviendra par la même translation un segment $\overrightarrow{b'b''}$ équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{a'a''}$ et par suite à $\overrightarrow{aa'}$ et à $\overrightarrow{bb'}$, et ainsi de suite. Il en résulte que, par la translation considérée, la géodésique $aa'a''$ se change en une autre géodésique $bb'b''$; on voit de plus que si $\overrightarrow{ab}$ et $\overrightarrow{a^{(n)}b^{(n)}}$ sont équipollents de première espèce, $\overrightarrow{aa^{(n)}}$ et $\overrightarrow{bb^{(n)}}$ sont équipollents de seconde espèce. *Les deux espèces d'équipollence sont donc conjuguées au sens du Chapitre I.*

Il en résulte (n° **2**) que la première équipollence jouit de la propriété 7° et par suite (n° **5**) que c'est une équipollence attachée à un groupe.

Nous avons donc le théorème suivant :

Pour qu'une connexion affine sans courbure soit attachée à un groupe, il faut et il suffit que la seconde connexion affine à laquelle conduisent les translations de l'espace soit elle-même sans courbure.

49. Il est intéressant d'avoir une démonstration analytique de ce théorème. D'après le calcul du n° **39**, la seconde connexion affine de l'espace a pour composantes les formes

$$\varpi_i^{\ j} = \sum_h c_{ki}^{\ \ j} \varpi^k. \tag{20}$$

Calculons la courbure de cette connexion affine en posant

$$dc_{ki}^{\ \ j} = \sum_h c_{ki\ \ |h}^{\ \ j} \varpi^h.$$

On a, en tenant compte du calcul fait au n° **40**,

$$\Pi_i^{\ j} = (\varpi_i^{\ j})' - \sum_k [\varpi_i^{\ k} \varpi_k^{\ j}] = \sum_{(\alpha\beta)} (c_{\beta i\ \ |\alpha}^{\ \ j} - c_{\alpha i\ \ |\beta}^{\ \ j} - g_{\alpha\beta i}^{\ \ \ j}) [\varpi^\alpha \varpi^\beta],$$

en posant

$$g_{\alpha\beta i}^{\ \ \ j} = \sum_k (c_{\alpha\beta}^{\ \ k} c_{ki}^{\ \ j} + c_{\beta i}^{\ \ k} c_{k\alpha}^{\ \ j} + c_{i\alpha}^{\ \ k} c_{k\beta}^{\ \ j}).$$

L'absence de courbure donne donc

(25) $$c_{\beta i}{}^{j}{}_{|\alpha} - c_{\alpha i}{}^{j}{}_{|\beta} = g_{\alpha\beta i}{}^{j}.$$

D'autre part, les équations

$$(\varpi^s)' = -\sum_{(jh)} c_{jh}{}^{s}[\varpi^j \varpi^h],$$

dérivées extérieurement, donnent

(26) $$c_{\alpha\beta}{}^{j}{}_{|i} + c_{\beta i}{}^{j}{}_{|\alpha} + c_{i\alpha}{}^{j}{}_{|\beta} = g_{\alpha\beta i}{}^{j};$$

il en résulte immédiatement

$$c_{\alpha\beta}{}^{j}{}_{|i} = 0;$$

autrement dit, les coefficients $c_{\alpha\beta}{}^{j}$ sont des constantes.

CHAPITRE III.

LA CONNEXION AFFINE SANS TORSION D'UN ESPACE DE GROUPE.

I. — Définition de la connexion affine sans torsion.

50. Dans tout ce qui précède, nous n'avons guère fait que présenter sous une forme géométrique des propriétés classiques des groupes finis et continus. L'introduction d'une troisième connexion affine, intrinsèquement liée au groupe, va nous fournir des points de vue nouveaux.

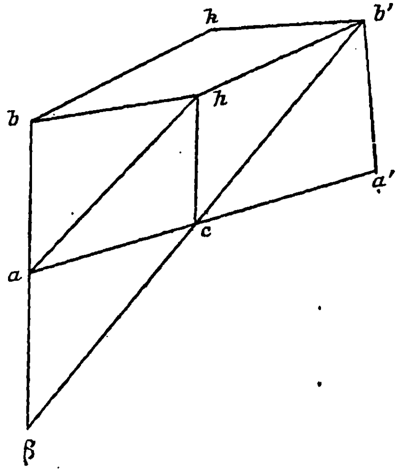
Considérons deux segments de géodésiques aa' et ab issus d'un même point (a). Si l'on mène par le point (b) le vecteur $\overrightarrow{bb_1}$ équipollent de première espèce à $\overrightarrow{aa'}$, le vecteur $\overrightarrow{a'b_1}$ est équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{ab}$; au contraire, si l'on mène par (b) le vecteur $\overrightarrow{bb_2}$ équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{aa'}$, le vecteur $\overrightarrow{a'b_2}$ est équipollent de première espèce à $\overrightarrow{ab}$.

Les deux vecteurs $\overrightarrow{a'b_1}$ et $\overrightarrow{a'b_2}$ résultent du même vecteur $\overrightarrow{ab}$ par deux transports par parallélisme distincts correspondant aux deux connexions affines sans courbure de deuxième et de première espèce.

51. Il existe une troisième manière de procéder intermédiaire entre les deux précédentes. Soit (c) le milieu du segment aa', c'est-à-dire le point de la géodésique aa' tel que les deux vecteurs $\overrightarrow{ac}$ et $\overrightarrow{ca'}$ soient équipollents.

Construisons le vecteur $\overrightarrow{bh}$ équipollent de première espèce à $\overrightarrow{ac}$ et le vecteur $\overrightarrow{hb'}$ équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{ca'}$; nous obtenons ainsi un vecteur $\overrightarrow{a'b'}$. On obtiendrait le même vecteur si l'on menait d'abord le vecteur $\overrightarrow{bk}$ équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{ac}$ puis le vec-

Fig. 2.



teur $\overrightarrow{kb'}$ qui serait nécessairement (n° 3) équipollent de première espèce à $\overrightarrow{ca'}$, puisque l'équipollence de seconde espèce de $\overrightarrow{bk}$ et de $\overrightarrow{hb'}$ entraîne l'équipollence de première espèce de $\overrightarrow{bh}$ et de $\overrightarrow{kb'}$.

Nous avons donc une construction nous permettant de déduire d'un vecteur $\overrightarrow{ab}$ un vecteur bien déterminé $\overrightarrow{a'b'}$ *quand on transporte l'origine de (a) en (a') le long de la géodésique qui joint ces deux points.*

On peut dire encore que le vecteur $\overrightarrow{a'b'}$ s'obtient en construisant le vecteur $\overrightarrow{ch}$ équipollent de seconde espèce à $\overrightarrow{ab}$ et en prenant le vecteur d'origine (a') équipollent de première espèce à $\overrightarrow{ch}$.

52. On peut présenter la construction sous une forme plus élégante. Prenons le symétrique (β) du point (b) par rapport au point (a), c'est-à-dire le point (β) tel que $\overrightarrow{\beta a}$ soit équipollent à $\overrightarrow{ab}$. *Le point (b') n'est autre que le symétrique de (β) par rapport au milieu (c) de aa'.*

Désignons en effet par le symbole $\overset{(1)}{=}$ ou $\overset{(2)}{=}$ l'équipollence de première ou de seconde espèce. De l'équipollence

$$\overrightarrow{ch} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{ab} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{\beta a}$$

résulte

$$\overrightarrow{\beta c} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{ah}.$$

De l'équipollence

$$\overrightarrow{ac} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{ca'} \overset{(2)}{=} \overrightarrow{hb'}$$

résulte

$$\overrightarrow{ah} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{cb'}.$$

On a donc

$$\overrightarrow{\beta c} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{cb'}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On déduit en particulier de cette construction le théorème que *si le point (b) décrit une géodésique issue de (a), le point (b') décrit également une géodésique issue de (a')*. De plus, *les points (b) et (b') décrivent sur leurs deux trajectoires des divisions égales* (nº **15**).

53. Il est facile de calculer $T_{b'}$ connaissant T_a, $T_{a'}$ et T_b. On a

$$T_h T_b^{-1} = T_c T_a^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad T_h = T_c T_a^{-1} T_b,$$

puis

$$T_{b'} T_{a'}^{-1} = T_h T_c^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad T_{b'} = T_c T_a^{-1} T_b T_c^{-1} T_{a'}.$$

Or la transformation $T_c T_a^{-1}$ est la racine carrée de $T_{a'} T_a^{-1}$, et de même la transformation $T_c^{-1} T_{a'}$ est la racine carrée de $T_a^{-1} T_{a'}$. On a donc

$$T_{b'} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}}. \tag{1}$$

On arrive au même résultat en regardant (b') comme le symétrique de (β) par rapport à (c). On a

$$T_\beta T_a^{-1} = T_a T_b^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad T_\beta = T_a T_b^{-1} T_a,$$

puis

$$T_{b'} T_c^{-1} = T_c T_\beta^{-1}, \qquad \text{d'où} \qquad T_{b'} = T_c T_a^{-1} T_b T_a^{-1} T_c,$$

ce qui conduit à la même expression (1) pour $T_{b'}$.

54. La formule (1) permet de démontrer que, si l'on considère sur une même géodésique trois points (a), (a'), (a''), et qu'on transporte comme il vient d'être dit un vecteur $\overrightarrow{ab}$ de (a) en (a'), puis le vecteur $\overrightarrow{a'b'}$ obtenu de (a') en (a''), le vecteur final $\overrightarrow{a''b''}$ est le même que si l'on avait transporté directement $\overrightarrow{ab}$ de (a) en (a''). On a en effet

$$T_{b'} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}},$$

$$T_{b''} = \sqrt{T_{a''} T_{a'}^{-1}}\, T_{b'} \sqrt{T_{a'}^{-1} T_{a''}} = \sqrt{T_{a''} T_{a'}^{-1}} \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}} \sqrt{T_{a'}^{-1} T_{a''}}.$$

Or, les deux transformations

$$\sqrt{T_{a''} T_{a'}^{-1}} \qquad \text{et} \qquad \sqrt{T_{a'}^{-1} T_a}$$

appartiennent à un même sous-groupe à un paramètre (celui qui définit la direction de première espèce de la géodésique); elles sont donc échangeables entre elles, et le carré de leur produit s'obtient en multipliant le carré de la première par le carré de la seconde, ce qui donne

$$T_{a''} T_{a'}^{-1} T_{a'} T_a^{-1} = T_{a''} T_a^{-1};$$

on a donc finalement

$$T_{b''} = \sqrt{T_{a''} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a''}}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

55. Considérons un vecteur $\overrightarrow{ab}$ et un chemin *quelconque* (C) partant de (a) et aboutissant à un point (a'). Il existe un transport par parallélisme déterminé du vecteur $\overrightarrow{ab}$ le long du chemin (C) : pour l'obtenir, on partagera le chemin (C) en un grand nombre d'arcs

partiels par des points de subdivision $(a_1), (a_2), \ldots, (a_n)$. On transportera $\overrightarrow{ab}$ en $\overrightarrow{a_1 b_1}$ le long de l'arc de géodésique aa_1 comme il a été expliqué dans les numéros précédents, puis on transportera $\overrightarrow{a_1 b_1}$ en $\overrightarrow{a_2 b_2}$ le long de l'arc de géodésique $a_1 a_2$, et ainsi de suite. Lorsque le nombre des arcs partiels augmentera indéfiniment, de manière que chacun d'eux tende vers zéro, le vecteur final tendra vers un vecteur limite $\overrightarrow{a'b'}$. Il résulte du n° 54 que, *si la courbe* (C) *est une géodésique*, le vecteur final $\overrightarrow{a'b'}$ pourra s'obtenir par un seul transport direct. On voit de plus que, quelle que soit la courbe (C), le point (b') décrira une géodésique passant par (a') si le point (b) décrit une géodésique passant par (a), et que, sur ces deux géodésiques, les points (b) et (b') décriront des divisions égales. Ce qui n'est pas certain, c'est que le vecteur $\overrightarrow{a'b'}$ ne dépende pas du chemin (C) suivi pour aller de (a) en (a') : nous verrons, au contraire, qu'*il en dépend en général.*

Calculons les composantes du vecteur $\overrightarrow{a'b'}$, rapportées au repère cartésien de première espèce attaché à (a'), en supposant que le point (a') soit infiniment voisin du point (a). Soit

$$\Sigma u^i X_i f = Uf$$

le symbole de la transformation $T_b T_a^{-1}$, c'est-à-dire le symbole de première espèce du vecteur $\overrightarrow{ab}$, et soit

$$\Sigma v^i X_i f = Vf$$

celui de $\overrightarrow{a'b'}$. Soient enfin Θ et Θ' les deux transformations de symboles Uf et Vf.

On a, d'après (1),

$$\Theta' = T_{b'} T_{a'}^{-1} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b \sqrt{T_a^{-1} T_{a'}}\, T_{a'}^{-1} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, T_b T_c^{-1},$$

$$\Theta' = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, \Theta\, T_a T_c^{-1} = \sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}\, \Theta \sqrt{T_a T_{a'}^{-1}}.$$

Soit $\sum_i \varpi^i X_i f$ le symbole de première espèce du vecteur $\overrightarrow{aa'}$. La transformation $\sqrt{T_{a'} T_a^{-1}}$ a pour symbole $\frac{1}{2} \sum_i \varpi^i X_i f$. Il en résulte (n° **51**) que le symbole de Θ' est

$$Uf - \frac{1}{2}\sum_i \varpi^i(X_i U) = \sum_i \left(u^i - \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk}{}^i \varpi^j u^k\right) X_i f.$$

On a donc finalement

$$(2) \qquad v^i = u^i - \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk}{}^i \varpi^j u^k.$$

La formule (2) définit une troisième connexion affine de l'espace $\mathcal{E}$, le transport par parallélisme du vecteur (u^i) étant donné par les équations

$$(3) \qquad du^i + \frac{1}{2}\sum_{j,k} c_{jk}{}^i \varpi^j u^k = 0.$$

Les composantes de la troisième connexion affine sont :

1° Les formes ϖ^i;

2° Les formes $\omega_i^j = \frac{1}{2}\sum_k c_{ki}{}^j \varpi^k$.

Si l'on compare ces composantes à celles de la seconde connexion affine sans torsion définie par la formule (20) du n° **39**, on arrive au résultat suivant :

Si l'on transporte le long d'un chemin infiniment petit $\overrightarrow{aa'}$ un vecteur $\overrightarrow{ab}$ issu de (a) suivant les deux connexions affines sans courbure et la troisième connexion affine, le vecteur $\overrightarrow{a'b'}$ résultant de cette troisième connexion est la demi-somme géométrique des vecteurs $\overrightarrow{a'b_1}$ et $\overrightarrow{a'b_2}$ résultant des deux premières connexions.

Ce dernier résultat est du reste à peu près évident, d'après la construction donnée au n° **51**.

56. La connexion affine définie par les formules (3) admet les mêmes géodésiques que les deux connexions affines sans courbure. Il est en effet évident, par l'une quelconque des constructions géométriques indiquées, que si le point (b) est sur la géodésique (aa'), il en sera de même du point (b'), et que par suite tout vecteur porté sur une géodésique reste sur cette géodésique quand on le transporte par le troisième parallélisme le long de cette géodésique.

Les composantes de la troisième connexion affine, quand on utilise les repères cartésiens de première espèce, sont, d'après (3), les formes

$$\omega_i^j = \frac{1}{2}\sum_k c_{ki}{}^j \varpi^k = \frac{1}{2}\varpi_i^j,$$

où les ϖ_i^j sont les formes (20) qui définissent la seconde connexion affine sans courbure; comme les formes qui définissent la première connexion sont identiquement nulles, on en déduit le théorème suivant :

Si l'on rapporte l'espace à des repères cartésiens quelconques, les composantes ω_i^j de la troisième connexion affine sont les moyennes arithmétiques des composantes des deux connexions affines sans courbure.

Ce théorème va nous permettre de démontrer une propriété importante de la troisième connexion affine, à savoir qu'*elle est sans torsion*. En effet, dans un espace à connexion affine définie analytiquement par les formes ω^i et ω_i^j, la torsion est définie par les formes

$$\Omega^i = (\omega^i)' - \sum_k [\omega^k \omega_k^i],$$

dans lesquelles les $\omega_k{}^i$ interviennent *linéairement*. Il en résulte que *la torsion de la troisième connexion affine est la moyenne arithmétique des torsions des deux premières;* comme ces deux torsions sont égales et opposées, le théorème est démontré.

57. On peut chercher à se rendre compte directement de ce résultat. Reprenons la construction précédemment faite en supposant les points (b) et (a') infiniment voisins de (a). Soit $\overrightarrow{a'b'}$ le vecteur qui se déduit de $\overrightarrow{ab}$ quand on le transporte par le troisième parallélisme de (a) en (a'); soit $\overrightarrow{bb''}$ le vecteur qui se déduit de $\overrightarrow{aa'}$ quand on le transporte par parallélisme de (a) en (b). Nous allons d'abord nous faire une idée de l'écart entre le point (b') et le point (b'').

Soient (c) le milieu de $\overrightarrow{aa'}$, $\vec{d}$ le milieu de $\overrightarrow{ab}$; posons

$$T_c = \Theta_1 T_a, \qquad T_d = \Theta_2 T_a;$$

un calcul facile donne

$$T_{b'} = \Theta_1 \Theta_2^2 \Theta_1 T_a,$$
$$T_{b''} = \Theta_2 \Theta_1^2 \Theta_2 T_a;$$

d'où

$$T_{b''} T_{b'}^{-1} = \Theta_2 \Theta_1^2 \Theta_2 \Theta_1^{-1} \Theta_2^{-2} \Theta_1^{-1}.$$

Si l'on appelle αUf le symbole de la transformation Θ_1, et βVf celui de Θ_2, en désignant par α et β deux paramètres infiniment petits, un calcul un peu fastidieux montre que le second membre se réduit à la transformation identique, si l'on néglige les termes infiniment petits par rapport au produit $\alpha\beta$, c'est-à-dire par rapport à l'aire du quadrilatère $ab\,b'a'$.

Cela posé, développons le quadrilatère rectiligne $b'a'\,ab$ sur l'espace affine tangent en b', le développement se faisant suivant la troisième connexion affine. Les côtés du quadrilatère se développeront suivant des segments de droites, le côté ab devenant équipollent *au sens ordinaire* du mot à $a'b'$; à partir du point (a) on pourra remplacer le développement du quatrième côté bb' par celui de bb'', *en négligeant des infiniment petits par rapport à l'aire du cycle développé;* mais alors on obtiendra un vecteur équipollent à $\overrightarrow{aa'}$; on obtiendra donc dans le développement un contour fermé : cela signifie que la torsion est nulle.

II. — La connexion affine sans torsion et les géodésiques de l'espace $\mathcal{E}$.

58. On peut arriver à la connexion affine sans torsion définie dans le paragraphe précédent en partant d'un point de vue tout différent. Nous avons défini dans les deux premiers Chapitres les géodésiques de l'espace du groupe et sur chaque géodésique, à un facteur constant près, la longueur d'un segment variable. En choisissant sur chaque géodésique une origine et une unité de longueur arbitraires, la position d'un point est définie par son abscisse curviligne s. Les coordonnées $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^r$ sont alors définies en fonction de s par un système d'équations différentielles de la forme

$$(4) \qquad \frac{d^2\xi^i}{ds^2} + \sum_{k,h} \Gamma^i_{kh} \frac{d\xi^k}{ds}\frac{d\xi^h}{ds} = 0 \qquad (\Gamma^i_{kh} = \Gamma^i_{hk}).$$

Pour se rendre compte de ce résultat, il suffit de remarquer (n° **38**) qu'on a sur une géodésique

$$\frac{\varpi^1}{m^1} = \frac{\varpi^2}{m^2} = \ldots = \frac{\varpi^r}{m^r} = ds,$$

d'où

$$\frac{d}{ds}\left(\frac{\varpi^i}{ds}\right) = 0 \qquad (i = 1, \ldots, r),$$

ce qui donne, en remplaçant les ϖ^i par leurs valeurs et développant, des formules de la forme (4).

Les équations (4) montrent que les géodésiques considérées sont celles qui résulteraient de la connexion affine sans torsion définie par les composantes Γ^i_{kh}. Il existe donc une connexion affine sans torsion qui donne à l'espace du groupe les géodésiques définies dans les deux premiers Chapitres, avec la même métrique sur chaque géodésique. Il est facile de voir que cette connexion affine sans torsion est unique, car si, sur chaque géodésique, on multiplie s par un facteur constant, les équations (4) ne changent pas.

59. On peut du reste, dans un espace quelconque à connexion affine sans torsion, donner du transport par parallélisme une construction qui généralise celle du n° **52**. Prenons deux points infiniment voisins (a) et (a'), et soit (c) le milieu de l'arc de géodésique joignant ces deux points. Considérons la transformation ponctuelle (symétrie) qui fait correspondre à tout point (m) [suffisamment voisin de (a)] le point (m') situé sur la même géodésique que les points (c) et (m) et tel que l'arc cm' soit égal à l'arc mc. A toute direction issue de (a) correspond par symétrie une direction issue de (a'), et à tout vecteur infiniment petit $\overrightarrow{ab}$ issu de (a) correspond par symétrie un vecteur infiniment petit issu de (a') : *le symétrique de ce dernier par rapport à (a') n'est autre que le vecteur résultant de $\overrightarrow{ab}$ par parallélisme le long de aa'.*

Pour démontrer cette propriété, utilisons en (c) les coordonnées normales de Riemann. Si les coordonnées (ordinaires) d'un point sont $x^1, \ldots, x^n$, les coordonnées normales $y^1, \ldots, y^n$ sont données par

$$y^i = (x^i)'_0 \, s,$$

en désignant par $(x^i)'_0$ les valeurs initiales en (c) des dérivées $\frac{dx^i}{ds}$ sur la géodésique qui joint le point (c) au point considéré. Avec ce choix des coordonnées normales, les composantes Γ^i_{hk} de la connexion affine sont toutes nulles en (c). Supposons, ce qui ne restreint pas la généralité, que la géodésique aa' soit définie par

$$y^2 = y^3 = \ldots = y^n = 0.$$

Les formules qui donnent le transport par parallélisme, le long de cette géodésique, d'un vecteur de composantes u^i sont

$$(5) \qquad \frac{du^i}{dy^1} + \sum \Gamma^i_{k1} u^k = 0.$$

Soient $y_1 = a$ l'abscisse de (a') et $y_1 = -a$ celle de (a); les équations (5) donnent

$$u^i = (u^i)_0 - \frac{1}{2} \sum_k \left(\frac{\partial \Gamma^i_{k1}}{\partial y^1} \right)_0 (u^k)_0 (y^1)^2 + \ldots.$$

Il en résulte qu'*aux infiniment petits du troisième ordre près*, les composantes du vecteur transporté sont les mêmes en (a) et (a'); la *direction* du vecteur en (a) et la *direction* opposée à celle du vecteur en (a') sont donc symétriques l'une de l'autre par rapport à (c). Si, de plus, ces deux vecteurs sont infiniment petits, le vecteur opposé à l'un d'eux est symétrique de l'autre par rapport à (c), et cela à des infiniment petits du troisième ordre près.

On remarquera que la construction due à F. Severi [1] du transport

---

[1] *Rend. Circ. mat. Palermo*, t. 42, 1917, p. 254.

par parallélisme dans un espace de Riemann donne un résultat exact aux infiniment petits du *second ordre* près.

On voit que, dans l'espace $\mathcal{E}$ du groupe G, la construction indiquée est rigoureusement exacte si le transport se fait le long d'un arc de géodésique fini.

III. — La courbure de la connexion affine sans torsion.

60. Si nous continuons à choisir les repères cartésiens de première espèce, les composantes de la connexion affine sans torsion sont (n° **55**) :

1° Les formes ϖ^i;

2° Les formes $\omega_i^j = \frac{1}{2}\varpi_i^j = \frac{1}{2}\sum_k c_{ki}^{\cdot\cdot j}\,\varpi^k$.

La courbure de l'espace est définie par les formes

$$\Omega_i^j = (\omega_i^j)' - \sum_k [\omega_i^k \omega_k^j] = \frac{1}{2}(\varpi_i^j)' - \frac{1}{4}\sum_k [\varpi_i^k \varpi_k^j].$$

Or, la seconde connexion affine sans courbure ayant précisément les composantes ϖ_i^j, on a

$$(\varpi_i^j)' = \sum_k [\varpi_i^k \varpi_k^j];$$

on a, par suite,

$$\Omega_i^j = \frac{1}{4}(\varpi_i^j)' = -\frac{1}{4}\sum_{k,(\alpha\beta)} c_{ki}^{\cdot\cdot j}\, c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k}[\varpi^\alpha \varpi^\beta]. \tag{6}$$

Les symboles de Riemann-Christoffel généralisés sont donc ici

$$R_{i\,\alpha\beta}^{j} = \frac{1}{4}\sum_k c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k}\, c_{ki}^{\cdot\cdot j}. \tag{7}$$

Ce résultat s'interprète géométriquement de la manière suivante.

Considérons un parallélogramme élémentaire dont les deux côtés soient équipollents de première espèce aux vecteurs de symboles $X_\alpha f$ et $X_\beta f$; la rotation affine associée à ce cycle a pour effet de donner au vecteur de symbole $X_i f$ l'accroissement géométrique

$$\sum R/_{\alpha\beta} X_j f = \frac{1}{4}\big((X_\alpha X_\beta) X_i\big).$$

Plus généralement, *à un parallélogramme de côtés* Uf *et* Vf *infiniment petits est associée la rotation affine qui donne au vecteur* $X_i f$ *l'accroissement géométrique infiniment petit*

$$\nabla X_i f = \frac{1}{4}\big((UV) X_i\big).$$

61. Le résultat précédent a été démontré en caractérisant chaque vecteur issu du point origine (a) du cycle élémentaire par le symbole du vecteur équipollent de *première* espèce issu du point origine de l'espace. Mais le résultat serait le même si on le représentait par le symbole du vecteur équipollent de seconde espèce issu du point origine; cela reviendrait en effet à remplacer le symbole Uf d'un vecteur quelconque issu de (a) par le symbole $\overline{U}f$ de la transformation infinitésimale transformée de Uf par T_a. Si alors $\overline{X}_i f$, $\overline{U}f$, $\overline{V}f$ sont les transformées de $X_i f$, Uf, Vf; si, de plus, on appelle $Y_i f$ la transformation $\frac{1}{4}\big((UV) X_i\big)$ et $\overline{Y}_i f$ sa transformée, on aura toujours la formule

$$\overline{Y}_i f = \frac{1}{4}\big((\overline{U}\,\overline{V})\overline{X}_i\big)$$

pour représenter l'accroissement $\overline{Y}_i f$ subi par le vecteur $\overline{X}_i f$ dans la rotation associée au cycle.

Ce raisonnement est général et ne suppose pas que les vecteurs unitaires du repère cartésien attaché au point (a) soient équipollents de première ou de seconde espèce aux vecteurs unitaires $X_i f$ issus du point origine : *il suffit qu'ils se déduisent par exemple des vecteurs unitaires du repère cartésien de première espèce par une transformation du groupe adjoint*, c'est-à-dire que les vecteurs unitaires du nouveau repère cartésien aient pour symboles, rapportés au repère cartésien de première espèce, les transformées, par une transformation T_α *quelconque* du groupe G, des transformations infinitésimales $X_1 f, X_2 f, \ldots, X_r f$. *Avec ce choix très général des repères, les composantes* $R_{i\,\alpha\beta}^{j}$ *du tenseur de Riemann-Christoffel généralisé conserveront la forme*

$$R_{i\,\alpha\beta}^{j} = \frac{1}{4} \sum_{k} c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k}\, c_{ki}^{\cdot\cdot j}. \tag{7}$$

Nous appellerons *repère normal* un repère satisfaisant aux conditions précédentes.

62. Le résultat précédent conduit à une conséquence extrêmement importante. Partons d'un cycle élémentaire d'origine (a) et transportons-le par parallélisme sans torsion suivant un chemin quelconque en un point quelconque (a'). Transportons en même temps par parallélisme le repère cartésien (*par exemple* le repère de première espèce) attaché au point (a); en un point (a') infiniment voisin de (a), le repère cartésien obtenu ne sera plus de première espèce; son $i^{\text{ième}}$ vecteur unitaire sera, par rapport au repère de première espèce attaché à (a'), représenté par le symbole

$$X_i f - \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{ji}^{\cdot\cdot k}\, \varpi^j X_k f,$$

comme cela résulte des équations (2). Or on a

$$X_i f - \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{ji}^{\cdot\cdot k}\, \varpi^j X_k f = X_i f - \frac{1}{2} (\Sigma \varpi^j X_j, X_i);$$

le repère cartésien obtenu en (a') se déduira donc du repère cartésien de première espèce attaché à (a') par une transformation du groupe adjoint, $X_i f$ *étant changée dans sa transformée par la transformation infinitésimale* $\frac{1}{2} \Sigma \varpi^j X_j f$.

On voit donc que de proche en proche le repère cartésien attaché au point (a), transporté par parallélisme sans torsion, restera constamment un repère *normal*, et que par suite *la courbure du cycle élémentaire sera transportée par parallélisme en même temps que le cycle*, les composantes $R_{i\,\alpha\beta}^{j}$ conservant constamment les mêmes valeurs numériques.

L'espace à connexion affine sans torsion d'un groupe jouit donc de la propriété que la courbure d'un cycle élémentaire se conserve si le cycle est transporté par parallélisme (¹).

63. Analytiquement, cette propriété se traduirait par le fait que le tenseur dérivé du tenseur de Riemann-Christoffel est identiquement nul. Il est intéressant de le vérifier par le calcul. Les $R_{i\ \alpha\beta}^{j}$ étant des constantes, il faut vérifier l'identité

$$\sum R_{k\ \alpha\beta}^{j}\omega_i^k - R_{i\ \alpha\beta}^{k}\omega_k^j + R_{i\ k\beta}^{j}\omega_\alpha^k + R_{i\ \alpha k}^{j}\omega_\beta^k = 0,$$

ou, en prenant les termes en ϖ^γ,

$$\sum_k R_{k\ \alpha\beta}^{j} c_{\gamma i}^{\cdot\cdot k} - R_{i\ \alpha\beta}^{k} c_{\gamma k}^{\cdot\cdot j} + R_{i\ k\beta}^{j} c_{\gamma\alpha}^{\cdot\cdot k} + R_{i\ \alpha k}^{j} c_{\gamma\beta}^{\cdot\cdot k} = 0.$$

Or le premier membre, multiplié par -4, est le coefficient de $X_j f$ dans le développement de l'expression

$$((X_\gamma X_i)(X_\alpha X_\beta)) - \Big(X_\gamma\big(X_i(X_\alpha X_\beta)\big)\Big) + \Big(X_i\big(X_\beta(X_\alpha X_\gamma)\big)\Big) + \Big(X_i\big(X_\alpha(X_\gamma X_\beta)\big)\Big);$$

en se servant de l'identité de Jacobi, on démontre sans peine que cette expression est nulle.

Les espaces à connexion affine sans torsion dont la courbure se conserve par parallélisme forment une classe très remarquable d'espaces dont il sera parlé dans le Chapitre suivant.

IV. — L'élément de volume de l'espace à connexion affine sans torsion.

64. L'espace à connexion affine sans torsion attaché à un groupe admet une unité de volume *absolue*. En effet, par la transformation infinitésimale

$$\delta X_i f = \big(X_i(X_\alpha X_\beta)\big) = \sum_{k,j} c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k} c_{ik}^{\cdot\cdot j} X_j f,$$

(¹) *Cf.* n° **46**, note.

associée à un cycle élémentaire, le volume construit sur les vecteurs unitaires $X_1 f, \ldots, X_r f$, subit une variation logarithmique égale à

$$\sum_{k,i} c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k} c_{ik}^{\cdot\cdot i}.$$

Or cette quantité est nulle : cela résulte de l'identité de Jacobi

$$((X_\alpha X_\beta)X_i) + ((X_\beta X_i)X_\alpha) + ((X_i X_\alpha)X_\beta) = 0,$$

qui donne en particulier

$$\sum_{i,k} (c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot k} c_{ik}^{\cdot\cdot i} + c_{\beta i}^{\cdot\cdot k} c_{\alpha k}^{\cdot\cdot i} + c_{i\alpha}^{\cdot\cdot k} c_{\beta k}^{\cdot\cdot i}) = 0;$$

la seconde et la troisième somme s'annulent mutuellement, comme on le voit en échangeant dans l'une d'elles les indices de sommation i et k ([1]).

L'existence d'une unité de volume absolue pouvait se prévoir *a priori*. En transportant par parallélisme, de (a) en un point infiniment voisin (a'), un volume élémentaire, les deux mesures $d\tau_1$ et $d\tau_2$, de première et de seconde espèce, de ce volume, subissent des variations logarithmiques *égales et opposées;* par suite, le nombre $\sqrt{d\tau_1\, d\tau_2}$ reste fixe. Il existe donc bien dans l'espace une mesure absolue des volumes.

Dans l'exemple du n° **35**, on a

$$d\tau_1 = \frac{da\, db}{a}, \qquad d\tau_2 = \frac{da\, db}{a^2},$$

$$d\tau = \sqrt{d\tau_1\, d\tau_2} = \frac{da\, db}{a^{\frac{3}{2}}}.$$

([1]) On peut aussi invoquer la propriété de symétrie du tenseur contracté

$$R_{ij} = \sum_k R_{i\ \ jk}^{\ k}$$

pour affirmer l'existence d'une unité de volume absolue, comme cela résulte d'un théorème classique. (*Voir* par exemple J.-A. Schouten, *Der Ricci-Kalkül*, Berlin, Springer, 1922, p. 90.)

On peut démontrer que, avec les variables canoniques de S. Lie, le coefficient de $da_1\, da_2 \ldots da_r$ dans $d\tau$ est une fonction entière des variables.

Si les r sommes $\sum_k c_{ik}^{\cdot\cdot k}$ sont nulles, on a $d\tau = d\tau_1 = d\tau_2$.

V. — Le tenseur de courbure contracté.

65. Dans un espace à connexion affine sans torsion, le tenseur de courbure contracté est

$$R_{ij} = \sum_k R_i{}^k{}_{jk}.$$

On a ici

$$R_{ij} = -\frac{1}{4} \sum_{k,h} c_{jk}^{\cdot\cdot h} c_{ih}^{\cdot\cdot k} = -\frac{1}{4} g_{ij};$$

le tenseur R_{ij} est *symétrique*, à cause de l'existence d'une unité de volume absolue; cela résulte du reste immédiatement de son expression analytique.

Comme la courbure de l'espace se conserve par le transport par parallélisme, le groupe adjoint laisse invariante la forme quadratique de coefficients g_{ij}. En se servant, avec S. Lie, des lettres e^i pour représenter les variables transformées par le groupe adjoint, on obtient une forme qui joue un rôle extrêmement important dans la théorie desgroupes, à savoir

$$\varphi(e) = \sum_{i,j} g_{ij} e^i e^j = \sum_{i,j,k,h} c_{ik}^{\cdot\cdot h} c_{jh}^{\cdot\cdot k} e^i e^j;$$

cette forme donne la somme des carrés des racines de l'équation caractéristique du groupe (¹); on sait que c'est un invariant du groupe adjoint. La condition nécessaire et suffisante pour que le

---

(¹) E. Cartan, *Thèse*, p. 24-25; avec les notations de ma Thèse, on a

$$\varphi(e) = \psi_1^2(e) - 2\psi_2(e).$$

groupe soit semi-simple est que le discriminant de cete forme soit différent de zéro [1].

Le transport par parallélisme laisse invariante la courbure, et par suite la forme $\varphi(e)$. *Si donc le groupe est semi-simple, l'espace à connexion affine sans torsion qui lui est attaché est à connexion métrique, avec unité de volume absolue; c'est donc un espace de Riemann.* On peut ajouter que le tenseur R_{ij} étant proportionnel au tenseur fondamental g_{ij}, *c'est un espace à courbure constante de seconde espèce* [2].

66. On pourrait plus généralement considérer une forme quadratique $\psi(e)$ non dégénérée invariante par le groupe adjoint, et la prendre pour forme fondamentale (le repère attaché à chaque point étant un repère normal). On définirait ainsi un espace de Riemann admettant la connexion affine sans torsion de l'espace $\mathcal{E}$. Dans cet espace de Riemann deux segments de géodésiques de même longueur, au sens défini au n° **15**, seraient encore de même longueur. Si le groupe G est simple, il n'existe pas, à un facteur constant près, d'autre forme quadratique $\psi(e)$ que la forme $\varphi(e)$ provenant du tenseur de courbure contracté. Si le groupe G se décompose en h sous-groupes simples, la forme quadratique $\psi(e)$ la plus générale dépend de h coefficients constants arbitraires

$$\psi(e) = C_1\,\varphi_1(e) + C_2\,\varphi_2(e) + \ldots + C_h\,\varphi_h(e),$$

les $\varphi_i(e)$ se rapportant respectivement aux h sous-groupes simples. Les espaces de Riemann correspondants ne sont pas en général à courbure constante de seconde espèce; aussi est-il tout naturel de réserver à l'espace de Riemann de forme fondamentale $\varphi(e)$ le nom d'espace de Riemann attaché au groupe.

Si le groupe G n'est pas semi-simple, son groupe adjoint n'admet pas nécessairement d'invariant quadratique non dégénéré, et l'on ne peut pas alors lui attacher un espace de Riemann.

---

(1) E. Cartan, *Thèse*, p. 51-52; en réalité le théorème est démontré pour la forme $\psi_2(e)$, mais il s'applique aussi à la forme $\varphi(e)$.

(2) E. Cartan, *La Géométrie des espaces de Riemann*, n° 36, p. 37-38.

VI. — Les variétés totalement géodésiques d'un espace de groupe.

67. Soit V_p une variété totalement géodésique à p dimensions de l'espace attaché à un groupe G. On sait qu'une telle variété est caractérisée par la propriété que tout vecteur qui lui est tangent lui reste tangent quand on le transporte par parallélisme (sans torsion), son origine restant dans la variété ([1]). Attachons à un point particulier (a) de la variété un repère cartésien normal (n° **61**); on pourra toujours supposer choisies les transformations infinitésimales de base du groupe de manière que les p premiers vecteurs de coordonnées soient tangents à la variété. Quand on transportera ce repère par parallélisme le long d'un chemin situé dans la variété, *il restera normal* et ses p premiers vecteurs resteront tangents à V_p. Nous choisirons, en un point variable (ξ) de la variété, le repère normal qui se déduit du repère normal attaché au point (a) quand on le transporte par parallélisme le long d'un chemin déterminé tracé dans la variété, partant de (a) et aboutissant à (ξ).

On aura alors, en se déplaçant d'une manière quelconque dans la variété, les équations

$$\omega^{p+1} = \omega^{p+2} = \ldots = \omega^r = 0. \tag{8}$$

La condition que les p premiers vecteurs de coordonnées restent tangents à V_p donne en outre

$$\omega_i^{\alpha} = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, r). \tag{9}$$

La dérivation extérieure des équations (9) donne

$$\Omega_i^{\alpha} = 0,$$

ou, en tenant compte de (8),

$$R_i{}^{\alpha}{}_{jk} = 0 \qquad (i, j, k = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, r). \tag{10}$$

([1]) E. Cartan, *La Géométrie des espaces de Riemann*, p. 39. La démonstration est la même pour les espaces à connexion affine sans torsion que pour les espaces de Riemann.

Les équations (10) s'écrivent explicitement, d'après (7),

$$\sum_{\rho} c_{jk}{}^{\rho} c_{\rho i}{}^{\alpha} = 0; \tag{11}$$

elles expriment que les transformations infinitésimales

$$((X_j X_k) X_i) \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, p)$$

ne dépendent linéairement que de $X_1 f, \ldots, X_p f$.

Comme, en un point quelconque de V_p, les directions (de première espèce) de la variété ont pour symboles des transformations infinitésimales qui se déduisent, par une transformation du groupe G, de $X_1 f, \ldots, X_p f$, on arrive au théorème suivant :

En tout point d'une variété totalement géodésique V_p, *les symboles* $U_1 f, \ldots, U_p f$ *de p directions indépendantes de cette variété jouissent de la propriété que les transformations infinitésimales*

$$((U_j U_k) U_i)$$

dépendent linéairement de $U_1 f, \ldots, U_p f$.

68. Réciproquement considérons p transformations infinitésimales linéairement indépendantes $U_1 f, \ldots, U_p f$ telles que les transformations $((U_j U_k) U_i)$ ne dépendent que des $U_k f$. Prenons un point quelconque de l'espace et en ce point les géodésiques dont les directions de première espèce ont pour symboles $\lambda^1 U_1 f + \ldots + \lambda^p U_p f$. Je dis que ces géodésiques engendrent une variété totalement géodésique.

En effet nous pouvons supposer, sans restreindre la généralité, que les p transformations infinitésimales considérées sont

$$X_1 f, \quad X_2 f, \quad \ldots, \quad X_p f.$$

Attachons alors aux différents points de l'espace le repère normal *le plus général possible* (il dépend d'autant de paramètres qu'il y en a dans les transformations du groupe adjoint). Les composantes $\omega_i{}^j$ de la connexion affine sont de la forme

$$\omega_i{}^j = \sum_k c_{ki}{}^j \theta^k,$$

les expressions $\theta^1, \theta^2, \ldots, \theta^r$ étant des formes linéaires par rapport aux différentielles de ces paramètres. Considérons alors les équations de Pfaff

$$(12) \qquad \omega^\alpha = 0, \qquad \omega_i^\alpha = 0 \qquad (i = 1, \ldots, p;\ \alpha = p+1, \ldots, r).$$

Elles forment un système *complètement intégrable*, puisque, en tenant compte des équations (12), les covariants bilinéaires des premiers membres sont nuls en vertu des équations (11), supposées vérifiées. Ce système n'entraîne du reste, entre les différentielles des variables $\xi^1, \ldots, \xi^r$ qui localisent un point dans l'espace, que les $r-p$ relations indépendantes $\omega^\alpha = 0$.

Le système (12) définit donc une infinité de variétés totalement géodésiques à p dimensions; il admet de plus toujours une solution telle que cette variété passe par un point donné et qu'en ce point le repère normal soit un repère normal *donné*, par exemple le repère cartésien de première espèce. C'est ce qu'il fallait démontrer.

On voit que la variété totalement géodésique dont nous voulions démontrer l'existence fait partie d'une famille continue dépendant d'autant de paramètres que le système (12) contient d'équations linéairement indépendantes.

Le nombre de ces paramètres est $2r-p$, diminué du nombre des transformations infinitésimales linéairement indépendantes du groupe donné qui laissent invariant le faisceau

$$\lambda^1 X_1 f + \lambda^2 X_2 f + \ldots + \lambda^p X_p f.$$

Les variétés totalement géodésiques obtenues sont de première catégorie (n° **17**) si les transformations $X_1 f, \ldots, X_p f$ engendrent un groupe; sinon elles sont de seconde catégorie.

69. Prenons par exemple le groupe G à trois paramètres des rotations autour de l'origine, avec

$$(X_1 X_2) = X_3 f, \qquad (X_2 X_3) = X_1 f, \qquad (X_3 X_1) = X_2 f.$$

L'espace du groupe n'est autre que l'espace elliptique à trois dimensions. Par tout point de cet espace il passe une surface totalement géodésique tangente en ce point à un élément plan arbitrairement donné. On peut vérifier en effet que si l'on prend deux transformations quelconques du groupe

$$U f = a_1 X_1 f + a_2 X_2 f + a_3 X_3 f,$$
$$V f = b_1 X_1 f + b_2 X_2 f + b_3 X_3 f,$$

les transformations

$$((UV)U) \quad \text{et} \quad ((UV)V)$$

dépendent linéairement de Uf et de Vf. On a

$$((UV)U) = -(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\, Uf + (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)\, Vf,$$
$$((UV)V) = -(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)\, Uf + (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)\, Vf.$$

Toutes les surfaces totalement géodésiques réelles sont de seconde catégorie.

Plus généralement, on peut démontrer qu'étant donné l'espace d'un groupe quelconque à trois paramètres, ou bien cet espace satisfait à l'axiome du plan (c'est-à-dire qu'il admet ∞^3 surfaces totalement géodésiques), ou bien ses surfaces totalement géodésiques sont toutes de première catégorie. Ce dernier cas se présente pour les structures réductibles à la forme

$$(X_1 X_2) = \alpha X_2 f, \qquad (X_1 X_3) = \beta X_3 f, \qquad (X_2 X_3) = 0 \qquad (\alpha + \beta \neq 0),$$

ou

$$(X_1 X_2) = X_2 f, \qquad (X_1 X_3) = X_2 f + X_3 f, \qquad (X_2 X_3) = 0.$$

70. Prenons encore le groupe des déplacements euclidiens de l'espace à trois dimensions, engendré par les six transformations infinitésimales

$$X_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}, \qquad X_3 f = \frac{\partial f}{\partial z},$$
$$X_4 f = z\frac{\partial f}{\partial y} - y\frac{\partial f}{\partial z}, \qquad X_5 f = x\frac{\partial f}{\partial z} - z\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_6 f = y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Les variétés totalement géodésiques *de seconde catégorie* de l'espace $\mathcal{E}$ à six dimensions de ce groupe sont obtenues en prenant :

pour $p = 2$,

$$U_1 f = X_4 f, \qquad U_2 f = X_5 f$$

ou

$$U_1 f = X_2 f, \qquad U_2 f = X_4 f + m X_1 f;$$

pour $p = 3$,

$$U_1 f = X_3 f, \qquad U_2 f = X_4 f, \qquad U_3 f = X_5 f;$$

pour $p = 4$,

$$U_1 f = X_1 f, \qquad U_2 f = X_2 f, \qquad U_3 f = X_4 f, \qquad U_4 f = X_5 f;$$

pour $p = 5$,

$$U_1 f = X_1 f, \qquad U_2 f = X_2 f, \qquad U_3 f = X_3 f, \qquad U_4 f = X_4 f, \qquad U_5 f = X_5 f.$$

Les variétés totalement géodésiques à trois dimensions sont celles qui ont été considérées directement au nº **23**.

71. On peut dire d'une manière générale que si le groupe G n'est pas intégrable, l'espace $\mathcal{E}$ admet une infinité de variétés totalement géodésiques à deux dimensions de seconde catégorie, obtenues en partant de deux transformations infinitésimales quelconques d'un sous-groupe simple à trois paramètres, sous-groupe dont M. Engel a démontré l'existence [1].

Ajoutons enfin la remarque que toute variété totalement géodésique d'un espace à connexion affine sans torsion peut être regardée elle-même comme un espace à connexion affine, le transport par parallélisme d'un vecteur tangent à la variété se faisant suivant la connexion affine de l'espace ambiant. Si l'espace ambiant est un espace de groupe, le transport par parallélisme conserve la courbure et par suite *les variétés totalement géodésiques d'un espace sans torsion de groupe sont elles-mêmes des espaces à connexion affine sans torsion dont la courbure se conserve par le transport par parallélisme.*

Nous verrons plus loin (nº **82**) la réciproque de ce théorème.

---

[1] *Leipz. Ber.*, 1893, p. 360; *voir* aussi E. CARTAN, *Thèse*, p. 103.

CHAPITRE IV.

LE GROUPE D'HOLONOMIE, LE GROUPE D'ISOMORPHIE ET LE GROUPE D'ISOTROPIE DE L'ESPACE AFFINE SANS TORSION ATTACHÉ A UN GROUPE.

I. — Le groupe d'holonomie.

72. Nous avons rappelé (n° **33**) que les différents déplacements affines associés aux cycles issus d'un point donné d'un espace à connexion affine engendrent un groupe, le *groupe d'holonomie* g de l'espace. Le groupe γ, qui indique comment le groupe d'holonomie g transforme entre eux les vecteurs, est engendré par les rotations affines associées aux cycles issus du point; il peut alors être regardé comme le groupe des rotations que subit le corps des vecteurs issus d'un point (a) quand on le transporte par parallélisme le long d'un cycle arbitraire d'origine (a) (¹).

Dans le cas de l'espace à connexion affine sans torsion attaché à un groupe G, le groupe γ se détermine facilement. Attachons en effet à chaque point de l'espace un repère cartésien *normal* (n° **61**); quand on décrit un cycle d'origine (a), le repère cartésien attaché à (a) ne vient pas coïncider avec les repères attachés aux points intermédiaires, mais se déduit, en chaque point (ξ) du cycle, du repère normal attaché à (ξ) par une transformation du groupe adjoint. Par conséquent, après description du cycle, la rotation affine subie par le repère sera encore une transformation du groupe adjoint. Par suite, *le groupe γ est le groupe adjoint ou un de ses sous groupes.*

Cela prouve, ce que nous savions déjà, que l'espace peut être regardé comme un espace non holonome dont le groupe fondamental est le groupe adjoint (²) et, de ce point de vue, les repères naturellement attachés à un point sont ce que nous avons appelé les repères

---

(¹) *Voir* E. Cartan, *Ann. Éc. Norm.*, 3ᵉ série, t. XLI, p. 18-29.

(²) *Voir*, au sujet des notions introduites ici, le début de mon Mémoire : *Les groupes d'holonomie des espaces généralisés* (*Acta math.*, t. XLVIII, p. 1-42).

normaux. Or, en utilisant ces repères normaux, les rotations infinitésimales associées à un cycle élémentaire ont pour effet de donner à tout vecteur $X_i f$ une variation géométrique de la forme

$$\delta X_i f = -\frac{1}{4}(X_i(UV));$$

ce sont donc des opérations appartenant toutes au *groupe dérivé* du groupe adjoint. En effet, le crochet des deux transformations infinitésimales du groupe adjoint

$$\delta_1 X_i f = (X_i U)$$

et

$$\delta_2 X_i f = (X_i V).$$

est l'opération

$$\delta X_i f = \delta_1 \delta_2 X_i f - \delta_2 \delta_1 X_i f = ((X_i V) U) - ((X_i U) V) = (X_i(VU)).$$

Comme le groupe dérivé du groupe adjoint est un sous-groupe *invariant*, il en résulte que le groupe γ est ce sous-groupe invariant lui-même ou un de ses sous-groupes ([1]). Mais ce dernier cas ne peut pas se présenter, car les opérations infinitésimales

$$\delta X_i f = -\frac{1}{4}(X_i(UV))$$

engendrent complètement le groupe dérivé.

La conclusion est donc *que le groupe d'holonomie de l'espace transforme les vecteurs comme le groupe dérivé du groupe adjoint.*

73. De ce résultat découle la possibilité d'attacher aux différents points de l'espace des repères cartésiens tels que si l'on transporte par parallélisme de (a) à (b) le repère (R_a) attaché au point (a), le repère obtenu se déduise du repère (R_b) attaché à (b) par une transformation du groupe dérivé du groupe adjoint. Si le groupe dérivé est d'ordre inférieur à celui du groupe adjoint, les repères de première (ou de seconde) espèce peuvent ne pas satisfaire à la condition précédente.

74. La détermination complète du groupe d'holonomie se ferait en

([1]) E. CARTAN, *Acta math.*, t. XLVIII, p. 5

appliquant la méthode générale indiquée dans mon mémoire « Sur les variétés à connexion affine ».

Si nous prenons, par exemple, le groupe G dont l'équation finie est

$$x' = ax + b,$$

et dont les transformations infinitésimales sont

$$X_1 f = x \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x},$$

avec

$$(X_1 X_2) = -X_2 f,$$

le groupe γ est engendré par la transformation du groupe adjoint associée à $X_2 f$, à savoir

$$\delta X_1 f = (X_2 X_1) = X_2 f, \qquad \delta X_2 f = (X_2 X_2) = 0.$$

En appelant u, v les composantes d'un vecteur, cette transformation infinitésimale est

$$u \frac{\partial f}{\partial v}.$$

Le groupe d'holonomie est, en appelant u, v les coordonnées cartésiennes d'un point, le groupe

$$u \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial u}, \quad \frac{\partial f}{\partial v}$$

ou un de ses sous-groupes. On démontre facilement que c'est le groupe

$$u \frac{\partial f}{\partial v}, \quad \frac{\partial f}{\partial v},$$

dont les équations finies sont

$$u' = u, \qquad v' = v + Au + B.$$

II. — Groupe d'isomorphie d'un espace à connexion affine sans torsion.

75. Nous appellerons groupe d'isomorphie d'un espace à connexion affine, le groupe des transformations ponctuelles qui conservent la connexion affine de l'espace, c'est-à-dire qui changent deux vecteurs (infiniment voisins) parallèles en deux vecteurs parallèles.

Si l'espace à connexion affine est sans torsion, il faut et il suffit, pour qu'une transformation ponctuelle soit isomorphique, qu'elle conserve les géodésiques, ainsi que le rapport des segments sur chaque géodésique (n° **58**).

Si l'espace considéré est l'espace $\mathcal{E}$ à connexion affine sans torsion d'un groupe G, toutes les transformations ponctuelles qui conservent l'équipollence de première et de seconde espèce sont des transformations isomorphiques. Mais il peut y en avoir et il y en a sûrement d'autres. En particulier, la transformation définie par

$$T_{\xi'} = T_{\xi}^{-1}$$

(symétrie par rapport à l'origine), ou, plus généralement, la transformation

$$T_{\xi'} = T_a T_{\xi}^{-1} T_a$$

[symétrie par rapport au point (a)] est isomorphique : elle échange entre eux les deux systèmes d'équipollence.

La détermination de toutes les isomorphies de l'espace $\mathcal{E}$ revient à celle des isomorphies qui laissent invariant le point origine; il suffira en effet de combiner celles-là avec les transformations

$$T_{\xi'} = T_{\xi} T_a$$

pour avoir le groupe d'isomorphie le plus général.

76. Toute isomorphie doit conserver la courbure; si donc $X_i f$, $X_j f$, $X_k f$ sont trois transformations infinitésimales quelconques du groupe G et si l'on a

$$(X_i(X_j X_k)) = \sum_h c_{ijk}^{\ \ \ h} X_h f, \tag{1}$$

on devra avoir aussi, pour les transformations $\overline{X}_i f$, transformées des premières par une isomorphie laissant fixe le point origine,

$$(\overline{X}_i(\overline{X}_j \overline{X}_k)) = \sum_h c_{ijk}^{\ \ \ h} \overline{X}_h f.$$

Dans ces formules, les $\overline{X}_i f$ sont naturellement des combinaisons linéaires à coefficients constants de $X_1 f, \ldots, X_r f$. La connaissance de ces combinaisons entraîne la connaissance complète de l'isomorphie, toute géodésique issue du point origine étant changée en une géodésique déterminée et tout segment de la première étant changé en un segment déterminé de la seconde.

Nous allons démontrer que l'invariance des relations (1) est une condition *suffisante* pour que la transformation ponctuelle considérée soit une isomorphie.

Nous nous placerons plus généralement dans le cas d'un espace affine sans torsion jouissant de la propriété que le transport par parallélisme conserve la courbure, c'est-à-dire tel que le tenseur dérivé du tenseur de Riemann-Christoffel soit nul.

III. — Généralités sur les espaces à connexion affine sans torsion pour lesquels le tenseur dérivé $R_{i\ kh|l}^{\ j}$ est nul.

77. Prenons, en un point particulier (a_0) d'un espace dont le tenseur de courbure dérivé est nul, un repère cartésien particulier, d'ailleurs arbitraire, (R_0). Attachons à chaque point (a) de l'espace le repère (R) qui se déduit de (R_0) quand on le transporte par parallélisme de (a_0) en (a) suivant un chemin arbitraire, mais choisi suivant une loi déterminée. Avec ce choix des repères, les composantes $R_{i\ kh}^{\ j}$ du tenseur de courbure sont des *constantes*, puisqu'elles ont partout les mêmes valeurs numériques qu'en (a_0).

Déterminons alors les substitutions linéaires les plus générales qui, effectuées sur les composantes u^i d'un vecteur, laissent invariantes les composantes du tenseur de courbure. Toutes ces substitutions forment un groupe, qui peut être formé de plusieurs familles continues, dont l'une, h, forme un groupe continu. Soient s l'ordre de h et

$$(2) \qquad U_\rho f = \sum_{i,j} a_{\rho i}^{\ j} u^i \frac{\partial f}{\partial u^j} \qquad (\rho = 1, 2, \ldots, s)$$

s transformations infinitésimales indépendantes de ce groupe.

Attachons à chaque point (a) de l'espace le repère qui se déduit de (R) par la transformation la plus générale du groupe continu h. Avec ce choix des repères, qui dépendent maintenant, en dehors des coordonnées de leur origine, de s paramètres arbitraires (paramètres secondaires), le tenseur de courbure conserve les mêmes composantes.

Si l'on transporte par parallélisme l'un des repères (R) attachés au point (a) en un point infiniment voisin (a'), le repère obtenu se déduit de l'un quelconque des repères (R′) attachés au point (a') par une transformation du groupe h. On a donc, pour les composantes de la connexion affine, des relations de la forme

$$\omega_i{}^j = \sum_\rho a_{\rho i}{}^j \theta^\rho, \tag{3}$$

où les θ^ρ sont r formes de Pfaff linéaires par rapport à $\omega^1, \ldots, \omega^r$ et aussi par rapport aux différentielles des r paramètres secondaires; les $r+s$ formes $\omega^1, \ldots, \omega^r, \theta^1, \ldots, \theta^s$ sont du reste linéairement indépendantes.

Cela posé, on aura

$$(\omega^i)' = \sum_{k,\rho} a_{\rho k}{}^i [\omega^k \theta^\rho];$$

quant aux relations

$$(\omega_i{}^j)' = \sum_k [\omega_i{}^k \omega_k{}^i] - \sum_{(hl)} R_i{}^j{}_{hl} [\omega^h \omega^l],$$

elles deviennent

$$\sum_\rho a_{\rho i}{}^j (\theta^\rho)' = \sum_{(\lambda\mu)} (a_{\lambda i}{}^k a_{\mu k}{}^j - a_{\mu i}{}^k a_{\lambda k}{}^j)[\theta^\lambda \theta^\mu] - \sum_{(hl)} R_i{}^j{}_{hl} [\omega^h \omega^l]. \tag{4}$$

Or, si nous désignons par $C_{\alpha\beta}{}^\gamma$ les constantes de structure du groupe h, nous avons

$$(U_\lambda U_\mu) = \sum_{i,j,k} (a_{\lambda i}{}^k a_{\mu k}{}^j - a_{\mu i}{}^k a_{\lambda k}{}^j) u^i \frac{\partial f}{\partial u^j} = \sum_{\rho, i, j} C_{\lambda\mu}{}^\rho a_{\rho i}{}^j u^i \frac{\partial f}{\partial u_j},$$

d'où

$$\sum_k (a_{\lambda i}{}^k a_{\mu k}{}^j - a_{\mu i}{}^k a_{\lambda k}{}^j) = \sum_\rho C_{\lambda\mu}{}^\rho a_{\rho i}{}^j.$$

Les équations (4) deviennent donc

$$(5)\qquad \sum_{\rho} a_{\rho i}{}^{j}\Big\{(\theta^{\rho})' - \sum_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}{}^{\rho}[\theta^{\lambda}\theta^{\mu}]\Big\} + \sum_{(hl)} R_{i}{}^{j}{}_{hl}[\omega^{h}\omega^{l}] = 0.$$

Ces dernières équations montrent que chaque transformation infinitésimale

$$\sum_{i,j} R_{i}{}^{j}{}_{hl}\, u^{i} \frac{\partial f}{\partial u^{j}}$$

appartient au groupe h, ce que nous pouvions prévoir *a priori*, puisque c'est la rotation affine associée à un cycle élémentaire, laquelle s'obtient en composant une infinité de transformations infinitésimales de h. Posons donc

$$\sum_{i,j} R_{i}{}^{j}{}_{hl}\, u^{i} \frac{\partial f}{\partial u^{j}} = \sum_{\rho} B_{hl}{}^{\rho} a_{\rho i}{}^{j} u^{i} \frac{\partial f}{\partial u^{j}}.$$

Il en résulte

$$(\theta^{\rho})' = \sum_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}{}^{\rho}[\theta^{\lambda}\theta^{\mu}] - \sum_{(hl)} B_{hl}{}^{\rho}[\omega^{h}\omega^{l}].$$

Finalement les formes ω^{i} et θ^{α} satisfont aux relations

$$(6)\qquad \begin{cases} (\omega^{i})' = \sum\limits_{k,\rho} a_{\rho k}{}^{i}[\omega^{k}\theta^{\rho}], \\ (\theta^{\alpha})' = \sum\limits_{(\lambda\mu)} C_{\lambda\mu}{}^{\alpha}[\theta^{\lambda}\theta^{\mu}] - \sum\limits_{(hl)} B_{hl}{}^{\alpha}[\omega^{h}\omega^{l}], \end{cases}$$

où les coefficients $a_{\rho k}{}^{i}$, $C_{\lambda\mu}{}^{\alpha}$, $B_{hl}{}^{\rho}$ *sont des constantes.*

78. Il résulte de ce qui précède que l'*espace considéré admet un groupe d'isomorphie à $r+s$ paramètres*, dont les équations de structure sont précisément les équations (6).

En effet, appelons a_i les coordonnées d'un point de l'espace et b_i les paramètres secondaires introduits dans le choix des repères. Les équations

$$(7)\qquad \begin{cases} \omega^{i}(a', b'; da') = \omega^{i}(a, b; da), \\ \theta^{\alpha}(a', b'; da', db') = \theta^{\alpha}(a, b; da, db), \end{cases}$$

où les a' et les b' sont des fonctions inconnues des a et des b, sont complètement intégrables, puisque les covariants bilinéaires des deux membres de chaque équation sont, d'après (6), identiques si l'on tient compte des équations du système (7). La solution générale du système (7) dépend donc de $r+s$ constantes arbitraires; or, pour toute solution, les da'_i sont des combinaisons linéaires des da_i, par suite les a'_i sont des fonctions des seules variables a_i (et des constantes d'intégration). Toute solution du système (7) fournit donc dans l'espace une transformation ponctuelle accompagnée d'un changement de repères, et cette transformation ponctuelle est évidemment isomorphique, puisqu'elle conserve la forme des équations (6).

On peut remarquer que si l'on porte son attention uniquement sur la transformation ponctuelle des a_i dans les a'_i, *elle dépend effectivement de $r+s$ constantes arbitraires*. En effet, toute solution du système (7) qui laisserait invariantes toutes les variables a_i, intégrales premières des équations $\omega^i = 0$, laisserait aussi invariantes les intégrales premières des équations

$$\sum_\rho a_{\rho k}{}^i \theta^\rho = 0 \qquad (i, k = 1, \ldots, r),$$

obtenues en annulant les dérivées partielles par rapport aux ω^i des $(\omega^i)'$; mais ces équations entraînent avec elles $\theta^1 = \theta^2 = \ldots = \theta^s = 0$; les quantités b_j seraient donc aussi invariantes, ce qui est absurde.

79. Les transformations ponctuelles qui viennent d'être obtenues forment un groupe H. Il ne peut pas y avoir un groupe *continu* d'isomorphies plus grand que H. En effet, si l'on considère les transformations isomorphiques qui laissent fixe un point de l'espace, elles transforment les vecteurs issus de ce point suivant un groupe linéaire laissant invariant le tenseur de courbure, et qui par suite appartient à h; l'ordre du plus grand groupe continu d'isomorphie ne peut donc pas dépasser $r+s$. La validité de ce raisonnement repose sur la remarque déjà faite (n° **76**) que la connaissance de la substitution linéaire éprouvée par les vecteurs issus du point fixe entraîne la connaissance complète de l'isomorphie correspondante.

80. Nous allons donner du théorème précédent une autre démonstration qui aura l'avantage de montrer qu'il existe toujours une isomorphie laissant fixe un point arbitraire et transformant les vecteurs issus de ce point suivant une substitution linéaire quelconque laissant invariantes les composantes du tenseur de courbure, *que cette substitution linéaire fasse partie ou non du groupe continu h.*

Soit

$$\bar{u}^i = \sum_k a_k{}^i u^k \tag{8}$$

une substitution (à coefficients constants) laissant invariantes les composantes du tenseur de courbure. Elle laisse invariant le groupe continu h, lié d'une manière invariante à ces composantes. Supposons que la transformation infinitésimale $U_\alpha f$ soit changée en $\sum_\rho b_\alpha{}^\rho U_\rho f$. On aura

$$\sum_{i,j} a_{\dot\alpha i}{}^j u^i \frac{\partial f}{\partial u^j} = \sum_{\rho,i,j} b_\alpha{}^\rho a_{\dot\rho i}{}^j \bar{u}^i \frac{\partial f}{\partial \bar{u}^j}.$$

Comme on a

$$\frac{\partial f}{\partial u^j} = \sum_k a_j{}^k \frac{\partial f}{\partial \bar{u}^k},$$

on aura

$$\sum_k a_k{}^j a_{\dot\rho i}{}^k = \sum_{\sigma,k} b_\rho{}^\sigma a_i{}^k a_{\dot\sigma k}{}^j. \tag{9}$$

Posons

$$\bar{\omega}^i = \sum_k a_k{}^i \omega^k, \qquad \bar{\theta}^\alpha = \sum_\rho b_\rho^\alpha \theta^\rho; \tag{10}$$

$$\bar{\omega}_i{}^j = \sum_\rho a_{\dot\rho i}{}^j \bar{\theta}^\rho; \tag{11}$$

nous en déduirons, en tenant compte de (9),

$$\sum_k a_i{}^k \bar{\omega}_k{}^j = \sum_k a_k{}^j \omega_i{}^k. \tag{12}$$

On déduit immédiatement de (10) et (12),

$$(\bar{\omega}^i)' = \sum_k [\bar{\omega}^k \bar{\omega}_k^i], \tag{13}$$

puis, de (12),

$$(14)\quad \sum_h a_i^k \left\{ (\overline{\omega}_k^j)' - \sum_h [\overline{\omega}_k^h \overline{\omega}_h^j] \right\} = \sum_k a_k^j \left\{ (\omega_i^k)' - \sum_h [\omega_i^h \omega_h^k] \right\}$$
$$= -\sum_{k,(hl)} a_k^j \mathrm{R}_i{}^k{}_{hl} [\omega^h \omega^l].$$

D'autre part, la substitution (8) laissant invariantes les composantes du tenseur de courbure, on a

$$\sum_k a_k^j \mathrm{R}_i{}^k{}_{hl} = \sum_{\lambda,\mu,\nu} a_i^\lambda a_h^\mu a_l^\nu \mathrm{R}_\lambda{}^j{}_{\mu\nu},$$

ou

$$\sum_{k,(hl)} a_h^j \mathrm{R}_i{}^k{}_{hl} [\omega^h \omega^l] = \sum_{k,(hl)} a_i^k \mathrm{R}_k{}^j{}_{hl} [\overline{\omega}^h \overline{\omega}^l];$$

par suite on a, en comparant à (14),

$$(15)\quad (\overline{\omega}_i^j)' - \sum_k [\overline{\omega}_i^k \overline{\omega}_k^j] = -\sum_{(hl)} \mathrm{R}_i{}^j{}_{hl} [\overline{\omega}^h \overline{\omega}^l].$$

En définitive, les formes $\overline{\omega}^i$ et $\overline{\omega}_i^j$ données par (10) et (11) satisfont aux mêmes relations que les formes ω^i et ω_i^j, à savoir

$$(16)\quad \begin{cases} (\overline{\omega}^i)' = \sum_h [\overline{\omega}^h \overline{\omega}_h^i], \\ (\overline{\omega}_i^j)' = \sum_k [\overline{\omega}_i^k \overline{\omega}_k^j] - \sum_{(hl)} \mathrm{R}_i{}^j{}_{hl} [\overline{\omega}^h \overline{\omega}^l]. \end{cases}$$

Posons maintenant

$$\begin{aligned} \overline{\omega}^i &= \omega^i(a', b'; da'), \\ \overline{\theta}^\alpha &= \theta^\alpha(a', b'; da', db'), \\ \overline{\omega}_i^j &= \sum_\rho a_{\rho i}^j \theta^\rho(a', b'; da', db'); \end{aligned}$$

les équations aux différentielles totales

$$(17)\quad \overline{\omega}^i = \sum_k a_k^i \omega^k, \qquad \sum_k a_i^k \overline{\omega}_k^j = \sum_k a_k^j \omega_i^k,$$

qui se réduisent en fait, d'après (3) *et* (11), *aux* $r + s$ *équations*

$$\overline{\omega}^i = \Sigma a_k{}^i \omega^k, \qquad \overline{\theta}^\alpha = \Sigma b_\rho{}^\alpha \theta^\rho, \tag{18}$$

sont complètement intégrables, puisque les expressions $\overline{\omega}^i$ et $\overline{\omega}_i{}^j$ construites avec les a', b', da' et db', d'une part; les expressions linéaires en ω^i et $\omega_i{}^j$ au moyen desquelles elles s'expriment, d'autre part, satisfont aux mêmes relations (16).

L'intégration du système (17), ou du système équivalent (18), donne une solution générale dépendant de $r + s$ constantes arbitraires. *Chacune de ces solutions donne évidemment une isomorphie de l'espace* d'après (16). On peut disposer des constantes d'intégration de manière qu'un point donné de l'espace reste fixe par cette isomorphie (il reste encore s constantes arbitraires); les formules (17) montrent que, dans les ∞^s isomorphies correspondantes, les vecteurs issus du point (a) ont subi la substitution linéaire donnée.

81. Parmi les équations de la forme (8), il existe toujours les équations particulières

$$\overline{u}^i = -u^i \qquad \text{ou} \qquad \overline{\omega}^i = -\omega^i,$$

qui entraînent

$$\overline{\theta}^\alpha = \theta^\alpha;$$

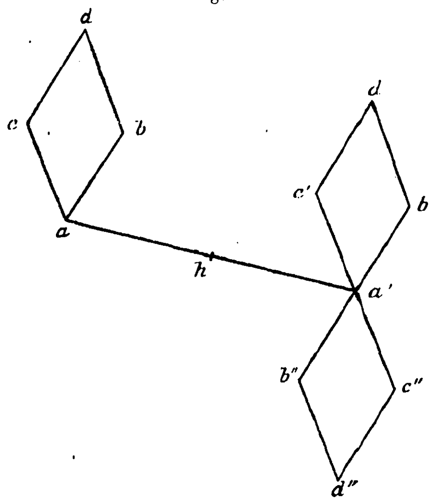
on voit du reste directement que ces relations conservent les équations de structure (6). Elles donnent, comme isomorphie particulière, une *symétrie* par rapport à un point arbitraire de l'espace. Nous avons donc l'important théorème suivant :

Si un espace à connexion affine sans torsion jouit de la propriété que le transport par parallélisme conserve la courbure, la symétrie par rapport à un point arbitraire de l'espace est une isomorphie.

La symétrie par rapport à un point (a) est la transformation ponctuelle qui fait correspondre à un point (ξ) quelconque le point (ξ') situé sur la même géodésique que (a) et (ξ) et tel que les deux segments de géodésique $\xi' a$ et $a\xi$ soient égaux.

Ce théorème admet une réciproque. Supposons en effet que toutes les symétries par rapport aux différents points de l'espace soient des isomorphies. Transportons par parallélisme un parallélogramme élémentaire $abcd$ du point (a) au point infiniment voisin (a'), et prenons la symétrique $a'b''d''c''$ par rapport à (a') du parallélogramme obtenu. D'après la construction du n° **59**, le parallélogramme $a'b''d''c''$ se

Fig. 3.



déduit, aux infiniment petits près du troisième ordre, du parallélogramme $abcd$ par symétrie par rapport au milieu (h) de l'arc de géodésique aa'. Cette symétrie étant une isomorphie, la courbure de la facette $abcd$ est égale à celle de la facette $a'b''d''c''$, et par suite à celle de la facette $a'b'd'c'$. C'est ce que nous voulions démontrer.

Les espaces à connexion affine sans torsion dont le tenseur dérivé de courbure est nul sont donc caractérisés par la propriété que la symétrie par rapport à un point quelconque de l'espace laisse invariante la connexion affine.

82. Nous allons indiquer une autre propriété remarquable de ces espaces.

Les équations (6) sont les équations de structure du groupe H. Elles jouent, par rapport à ce groupe, exactement le même rôle que les équations (12) ou les équations (16) du Chapitre II : ce sont par exemple les équations de définition du groupe H, considéré comme son premier groupe des paramètres ; les coefficients constants qui figurent dans les seconds membres des équations (6) sont les constantes de structure du groupe. Si l'on pose, pour la symétrie,

$$\theta^\alpha = \omega^{r+\alpha} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, s),$$

et si l'on appelle $X_i f$ et $X_{r+\alpha} f$ les transformations infinitésimales du second groupe des paramètres de H, on a

$$(19) \qquad \left\{ \begin{aligned} (X_i X_j) &= -\sum_\rho B_{ij}^{\rho} X_{r+\rho} f, \\ (X_i X_{r+\alpha}) &= \sum_k a_{\alpha i}^{k} X_k f, \\ (X_{r+\alpha} X_{r+\beta}) &= \sum_\rho C_{\alpha\beta}^{\rho} X_{r+\rho} f. \end{aligned} \right.$$

Considérons maintenant l'espace à connexion affine sans torsion du groupe H.. Comme les transformations infinitésimales $X_1 f, \ldots, X_r f$ satisfont à la condition que les transformations

$$((X_i X_j) X_k) \qquad (i, j, k = 1, 2, \ldots, r)$$

ne dépendent que de $X_1 f, \ldots, X_r f$, il en résulte (n° 68) l'existence, dans cet espace à $r + s$ dimensions, de variétés totalement géodésiques à r dimensions V_r. Ces variétés sont à connexion affine sans torsion. *Nous allons voir qu'elles sont identiques à l'espace à r dimensions dont nous sommes partis.*

En effet, pour obtenir les variétés V_r, nous attachons d'abord à chaque point de l'espace du groupe H le repère normal le plus général possible, ce qui se fait en posant

$$\omega_i^{j} = \sum_\rho a_{\rho i}^{j} \chi^{r+\rho},$$

$$\omega_i^{r+\alpha} = -\sum_k B_{ik}^{\alpha} \chi^k,$$

$$\omega_{r+\alpha}^{i} = -\sum_k a_{\alpha k}^{i} \chi^k,$$

$$\omega_{r+\alpha}^{r+\beta} = \sum_\rho C_{\alpha\rho}^{\beta} \chi^{r+\rho};$$

les χ sont $r+s$ expressions de Pfaff linéairement indépendantes entre elles et indépendantes des ω^i. Chacune des variétés V_r considérées s'obtiendra en prenant

$$\omega^{r+\alpha}=0, \qquad \omega_i^{r+\alpha}=0 \qquad (i=1, \ldots, r;\ \alpha=1, \ldots, s).$$

Il restera alors, pour définir la connexion affine des variétés V_r :

1° les formes $\omega^1, \omega^2, \ldots, \omega^r$, que nous écrirons $\overline{\omega}^i$, pour éviter toute confusion;

2° les formes $\overline{\omega}_i^j=\sum\limits_\rho a_{\rho i}^{\;j}\chi^{r+\rho}$.

D'autre part le tenseur de courbure sera [n° 60, formule (7)]

$$\overline{\mathrm{R}}_i{}^j{}_{kh}=\frac{1}{4}\sum_\rho \overline{\mathrm{C}}_{kh}{}^\rho\overline{\mathrm{C}}_{\rho i}{}^j=\frac{1}{4}\sum_\rho \mathrm{B}_{kh}{}^\rho a_{\rho i}^{\;j}.$$

On aura donc

$$\sum_\rho a_{\rho i}^{\;j}\left\{(\chi^{r+\rho})'-\sum_{(\lambda\mu)}\mathrm{C}_{\lambda\mu}{}^\rho[\chi^{r+\lambda}\chi^{r+\mu}]\right\}=-\frac{1}{4}\sum_\rho a_{\rho i}^{\;j}\sum_{(kh)}\mathrm{B}_{kh}{}^\rho[\overline{\omega}^k\overline{\omega}^h]$$

ou

$$(\chi^{r+\rho})'=\sum_{(\lambda\mu)}\mathrm{C}_{\lambda\mu}{}^\rho[\chi^{r+\lambda}\chi^{r+\mu}]-\frac{1}{4}\sum_{(kh)}\mathrm{B}_{kh}{}^\rho[\overline{\omega}^k\overline{\omega}^h].$$

Les équations de structure de chacune des variétés totalement géodésiques V_r sont donc finalement

$$(20)\qquad \left\{\begin{aligned}(\overline{\omega}^i)'&=\sum_{\rho,k} a_{\rho k}^{\;i}[\overline{\omega}^k\chi^{r+\rho}],\\(\chi^{r+\alpha})'&=\sum_{(\lambda\mu)}\mathrm{C}_{\lambda\mu}{}^\alpha[\chi^{r+\lambda}\chi^{r+\mu}]-\frac{1}{4}\sum_{(kh)}\mathrm{B}_{kh}{}^\alpha[\overline{\omega}^k\overline{\omega}^h].\end{aligned}\right.$$

Si nous les comparons aux équations de structure (6) de l'espace à r dimensions dont nous sommes partis, nous voyons qu'elles sont les mêmes, aux notations près, sauf que les $\mathrm{B}_{kh}{}^\alpha$ sont précédés, dans les équations (20), du facteur numérique $\frac{1}{4}$. Mais si, dans la variété V_r, nous remplaçons chaque repère par son homothétique de rapport 2 par rapport à son origine, nous retombons exactement sur les équations (6). Par suite la variété V_r et l'espace considéré sont *isomorphes* (on peut établir entre l'une et l'autre une correspondance ponctuelle qui conserve la connexion affine); l'isomorphisme se réalise effectivement du reste en intégrant les équations de Pfaff complètement intégrables

$$\overline{\omega}^i = 2\omega^i, \qquad \chi^{r+\alpha} = \theta^\alpha.$$

Nous arrivons donc à la conclusion suivante, réciproque du théorème du n° **71** :

Tout espace à connexion affine sans torsion dont le tenseur de courbure dérivé est nul est réalisable par une variété totalement géodésique de l'espace sans torsion de son groupe d'isomorphie.

83. Les considérations du n° **80** montrent que le plus grand sous-groupe du groupe d'isomorphie H qui laisse invariant un point donné de l'espace transforme les vecteurs issus de ce point suivant le groupe h, ou plutôt suivant le groupe (en général mixte) dont h est la partie *continue*, et qui est formé des substitutions linéaires qui laissent invariantes les composantes du tenseur de courbure.

Ce groupe linéaire peut être appelé le *groupe d'isotropie* de l'espace : il indique en effet le degré d'isotropie de l'espace autour du point considéré, étant formé de l'ensemble des changements qu'on peut faire subir aux directions issues de ce point sans changer la structure de l'espace. Ce groupe est le même en tous les points de l'espace.

IV. — Groupe d'isomorphie et groupe d'isotropie d'un espace de groupe.

84. Dans le cas où l'espace considéré est l'espace à connexion affine sans torsion attaché à un groupe G, le groupe d'isotropie est, comme nous l'avons vu (n° **76**), défini par l'ensemble des substitutions linéaires qui laissent invariantes les relations de la forme

$$(\mathrm{X}_i(\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k)) = \sum_h c_{ijk}{}^h \mathrm{X}_h f. \tag{21}$$

Le groupe d'isomorphie s'en déduit immédiatement, comme nous l'avons vu dans le paragraphe III.

La structure de l'espace sans torsion du groupe G est donc essentiellement caractérisée par les constantes $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$, en ce sens que *si l'on peut choisir, dans deux groupes* G *et* G′ *de même ordre, les transformations infinitésimales de base de manière à avoir les mêmes constantes* $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$, *les deux espaces sans torsion attachés aux deux groupes sont isomorphes*. Cela résulte immédiatement de ce que les équations de structure (6) des deux espaces pourront être ramenées à être identiques, les groupes h, donc les constantes $a_{\rho i}^{\cdot\cdot j}$ et $C_{\lambda\mu}^{\cdot\cdot\alpha}$, étant manifestement les mêmes, ainsi que les $B_{kh}^{\cdot\cdot\alpha}$ qui se déduisent de la même manière des $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$.

Il y a donc là une nouvelle espèce d'isomorphisme que nous pouvons appeler l'*isomorphisme affine* et qui peut ne pas se confondre avec l'isomorphisme classique. Il suffira, pour le montrer, de donner un exemple. Les constantes $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$ sont toutes nulles si les constantes $c_{ij}^{\cdot\cdot k}$ le sont, mais cette condition n'est pas nécessaire : pour le groupe G d'ordre 3 défini par

$$(X_1 X_2) = X_2 f, \qquad (X_2 X_3) = 0, \qquad (X_3 X_1) = 0,$$

les constantes $c_{ijk}^{\cdot\cdot\cdot h}$ sont évidemment aussi toutes nulles. L'espace sans torsion attaché à ce groupe est donc aussi sans courbure.

Dans le cas général l'isomorphisme affine de deux groupes G et G′ a lieu si leurs deux *groupes d'isomorphie* H et H′ sont isomorphes au sens ordinaire du mot.

85. Prenons un ou deux exemples. Le groupe G déjà considéré,

$$x' = ax + b,$$

admet les deux transformations infinitésimales

$$X_1 f = x\frac{\partial f}{\partial x}, \qquad X_2 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \qquad (X_1 X_2) = -X_2 f.$$

Les relations (21) sont ici

$$(X_1(X_1 X_2)) = X_2 f, \qquad (X_2(X_1 X_2)) = 0.$$

Posons

$$X_1 f = \alpha \overline{X}_1 f + \beta \overline{X}_2 f,$$
$$X_2 f = \alpha' \overline{X}_1 f + \beta' \overline{X}_2 f;$$

nous en déduisons

$$\alpha' = 0, \qquad \alpha^2 = 1,$$

ce qui donne un groupe mixte formé de deux familles continues. Celle qui correspond à $\alpha = 1$ fournit le groupe continu d'isotropie

$$\overline{u}^1 = u^1, \qquad \overline{u}^2 = \beta u^1 + \beta' u^2,$$

engendré par

$$U_1 f = u^1 \frac{\partial f}{\partial u^2}, \qquad U_2 f = u^2 \frac{\partial f}{\partial u^2};$$

ce n'est autre que le groupe adjoint de G.

L'espace attaché à G admet donc un groupe continu H d'isomorphie à 4 paramètres, auquel il faut joindre les isomorphies obtenues en combinant H avec une symétrie.

86. Soit le groupe G défini par les relations

$$(X_1 X_2) = 0, \qquad (X_1 X_3) = \alpha X_1 f, \qquad (X_2 X_3) = \beta X_2 f \qquad (\alpha\beta \neq 0).$$

Ici les seules équations (21) dont les seconds membres ne soient pas nuls sont

$$(X_3(X_1 X_3)) = -\alpha^2 X_1 f,$$
$$(X_3(X_2 X_3)) = -\beta^2 X_2 f.$$

On obtient pour le groupe d'isotropie les substitutions linéaires

$$X_1 f = A \overline{X}_1 f, \qquad X_2 f = B \overline{X}_2 f, \qquad X_3 f = C \overline{X}_1 f + D \overline{X}_2 f \pm \overline{X}_3 f.$$

Néanmoins, si $\alpha^2 = \beta^2$, on a

$$X_1 f = A \overline{X}_1 f + A' \overline{X}_2 f,$$
$$X_2 f = B' \overline{X}_1 f + B \overline{X}_2 f,$$
$$X_3 f = C \overline{X}_1 f + D \overline{X}_2 f \pm \overline{X}_3 f.$$

Si enfin $\alpha^2 = -\beta^2$ (en se plaçant alors dans le domaine complexe), on a quatre familles continues, dont les deux familles qui existent dans le cas général, et en outre

$$X_1 f = A\overline{X}_2 f, \qquad X_2 f = B\overline{X}_1 f, \qquad X_3 f = C\overline{X}_1 f + D\overline{X}_2 f \pm i\overline{X}_3 f.$$

Le groupe d'isotropie est donc d'ordre 4 dans le cas général (par conséquent il est plus grand que le groupe adjoint), et d'ordre 6 si $\alpha^2 = \beta^2$: dans ce dernier cas le groupe d'isomorphie est à 9 paramètres. Il en est ainsi pour le groupe des déplacements euclidiens du plan.

87. Revenons au cas général. Le groupe d'isotropie laisse évidemment invariante la forme quadratique $\varphi(e)$ (nº **65**), somme des carrés des racines de l'équation caractéristique du groupe G, puisque cette forme n'est autre que le tenseur contracté du tenseur de courbure. Dans le cas où G est semi-simple, le groupe d'isotropie est donc orthogonal, ce qui était évident *a priori*, l'espace $\mathcal{E}$ étant un espace de Riemann.

On peut remarquer d'une manière plus précise que le groupe d'isotropie laisse invariante l'équation aux carrés des racines de l'équation caractéristique du groupe G. Soient en effet Yf une transformation infinitésimale arbitraire de G et Xf une transformation telle que

$$(YX) = \lambda Xf;$$

on en déduit

$$(Y(YX)) = \lambda^2 Xf;$$

cette équation est une des équations (21), par suite λ^2 est le carré d'une des racines de l'équation caractéristique de la transformation $\overline{Y}f$, transformée de Yf par une quelconque des opérations du groupe d'isotropie.

Si le groupe G est semi-simple, on peut démontrer, par des considérations analogues à celles que j'ai utilisées dans un article récent [1], que le groupe continu d'isotropie est le groupe adjoint; quant au groupe mixte d'isotropie, il s'obtient en combinant la transformation

$$\overline{X}_i f = -X_i f$$

(symétrie par rapport au point considéré) avec le groupe linéaire le

[1] *Le principe de dualité, etc.* (*Bull. Sc. math.*, 4ᵉ série, t. 49, 1925, p. 361-374).

plus général qui laisse invariantes les relations de structure

$$(X_i X_j) = \Sigma c_{ij}{}^k X_k f.$$

Il est formé par suite, dans le cas où le groupe G est simple, de 2, 4 ou 12 familles continues. Le groupe d'isomorphie est donc à 2 r paramètres et contient de même, si G est simple, 2, 4 ou 12 familles continues de transformations. Le groupe continu d'isomorphie H se décompose en deux sous-groupes invariants simples isomorphes au groupe G lui-même, à savoir les groupes de translations de première et seconde espèce.

88. En résumé nous avons attaché à l'espace à connexion affine sans torsion d'un groupe G trois groupes distincts :

1° Le groupe d'isomorphie H;
2° Le groupe d'isotropie h;
3° Le groupe d'holonomie g.

Le groupe d'isotropie h est linéaire et contient le groupe adjoint comme sous-groupe (dans le cas où il ne se confond pas avec lui). Le groupe d'holonomie, ou plutôt le groupe linéaire qui indique comment ce groupe transforme les vecteurs, est lui-même un sous-groupe du groupe adjoint (à savoir son groupe dérivé). Enfin, comme il est facile de le voir, le groupe γ est un sous-groupe invariant de h.

Dans le cas où le groupe donné G est semi-simple, le groupe continu d'isotropie et le groupe continu d'holonomie (considéré en tant qu'opérant sur les vecteurs) sont identiques au groupe adjoint de Lie.

On en déduit immédiatement qu'un espace à connexion affine sans torsion attaché à un groupe G ne peut être isomorphe à un espace attaché à un groupe semi-simple G′ que si G et G′ sont isomorphes.

V. — Reconnaître si un espace à connexion affine sans torsion est un espace de groupe; translations et équipollences absolues.

89. Pour qu'un espace à connexion affine sans torsion soit un espace de groupe, il faut que le tenseur dérivé de son tenseur de courbure soit nul, mais cette condition n'est pas suffisante.

Plaçons-nous à un point de vue différent. Convenons d'appeler *translation infinitésimale*, dans un espace à connexion affine sans torsion, une transformation ponctuelle isomorphique dont les trajectiores soient des géodésiques de l'espace [1]. Dans un espace de groupe, les transformations

$$T_{\xi'} = T_\xi T_a$$

ou

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi,$$

où T_a désigne une transformation infinitésimale du groupe, sont évidemment des translations infinitésimales (c'est du reste sous ce nom de *translations* que nous les avons considérées au n° **16**). Les translations infinitésimales de première espèce, par exemple, forment un sous-groupe simplement transitif du groupe d'isomorphie de l'espace. Nous avons donc le théorème suivant :

Pour qu'un espace à connexion affine sans torsion soit un espace de groupe, il faut que son groupe d'isomorphie admette un sous-groupe simplement transitif de translations.

La réciproque est vraie.

Soit en effet G ce sous-groupe de translations. Choisissons dans l'espace un point origine (O), du reste quelconque, et prenons pour coordonnées d'un point arbitraire les paramètres de la transformation T du groupe G qui amène le point (O) au point donné. Considérons un sous-groupe à un paramètre de G : il est engendré par une translation infinitésimale; si le point mobile (u) est le transformé de (O) par les opérations de ce sous-groupe, le point (ξ), tranformé de (a), sera donné par

$$T_\xi = T_u T_a,$$

et, étant trajectoire d'une translation infinitésimale, le lieu de (ξ) est une géodésique de l'espace donné. Les géodésiques de l'espace donné sont donc identiques à celles de l'espace attaché au groupe G, et il est facile

(1) L'expression *translation infinitésimale* a donc ici une signification plus large qu'au n° **47**. Dans le cas d'un espace de Riemann, on obtient ainsi les translations infinitésimales classiques, caractérisées par la propriété que les différents points de l'espace décrivent des chemins infiniment petits égaux.

de voir en outre que le rapport de deux segments de géodésique est le même, soit qu'on considère l'espace donné comme l'espace du groupe G, soit qu'on le considère comme l'espace à connexion affine sans torsion donné *a priori*; dans les deux cas, en effet, une translation infinitésimale, effectuée deux fois de suite, fait décrire successivement à un point deux segments égaux de la même géodésique.

La démonstration montre en outre que la recherche des groupes G auxquels un espace à connexion affine sans torsion peut être attaché revient à celle des sous-groupes simplement transitifs de translations de son groupe d'isomorphie.

90. Prenons comme exemple l'espace affine proprement dit à r dimensions. Si l'on désigne par $x^1, x^2, \ldots, x^r$ les coordonnées cartésiennes d'un point, toute transformation infinitésimale du groupe d'isomorphie (qui est ici le groupe affine général) est de la forme

$$\frac{\delta x^i}{\delta t} = \sum_k a_k{}^i x^k + a^i.$$

Pour que cette transformation soit une translation infinitésimale, au sens donné à ce mot au numéro précédent, il faut qu'un point mobile dont la vitesse serait égale à $\frac{\delta x^i}{\delta t}$ ait constamment la même vitesse géométrique, c'est-à-dire que

$$\sum_k a_k{}^i \left(\sum_h a_h{}^k x^h + a^k \right) = 0,$$

d'où

$$\sum_k a_h{}^k a_k{}^i = 0, \qquad \sum_k a^k a_k{}^i = 0.$$

Cela revient à dire que le produit des deux matrices

$$\begin{pmatrix} a^1 & a^2 & \ldots & a^r \\ a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r^1 & a_r^2 & \ldots & a_r^r \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} a_1^1 & a_1^2 & \ldots & a_1^r \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_r^1 & a_r^2 & \ldots & a_r^r \end{pmatrix}$$

est nul. La translation proprement dite, au sens élémentaire du mot, ne se présente que si la seconde matrice est elle-même nulle.

Pour obtenir un groupe simplement transitif de translations, au sens généralisé du mot, il faut partir d'un groupe G à r paramètres pour lequel les coefficients $c_{ijk}^{\ \ \ l}$ sont tous nuls. Si $X_1 f, \ldots, X_h f$ sont les transformations du groupe dérivé, les crochets

$$(X_i X_j) \qquad (i = 1, 2, \ldots, h; j = 1, 2, \ldots, r)$$

sont tous nuls et les crochets

$$(X_{h+i} X_{h+j}) \qquad (i, j = 1, \ldots, r - h)$$

sont des combinaisons linéaires indépendantes, du reste quelconques, de $X_1 f, \ldots, X_h f$:

$$(X_{h+i} X_{h+j}) = \sum_k c_{h+i, h+j}{}^k X_k f.$$

On peut prendre par exemple

$$X_i f = \frac{\partial f}{\partial x^i}, \qquad X_{h+i} f = \frac{\partial f}{\partial x^{h+i}} - \frac{1}{2} \sum_{j,k} c_{h+i, h+j}{}^k x^{h+j} \frac{\partial f}{\partial x^k}.$$

Les transformations précédentes engendrent un groupe de translations de l'espace affine à r dimensions, et c'est, à un changement de variables près, le plus général.

91. La recherche d'un groupe simplement transitif de translations isomorphiques d'un espace à connexion affine sans torsion revient au fond à la recherche des équipollences *absolues* qu'il est possible de définir dans cet espace de manière :

1° Que les propriétés 1°-7° du n° **2** soient vérifiées;

2° Que deux segments égaux d'une même géodésique de l'espace soient équipollents.

Deux vecteurs infiniment petits seront considérés comme équipollents s'ils peuvent être regardés comme les chemins décrits par deux points dans une même translation infinitésimale du groupe.

Si l'espace donné est l'espace à connexion affine sans torsion d'un groupe simple G, nous allons montrer qu'il n'existe pas d'autre équipollence absolue satisfaisant aux conditions énoncées que les deux équipollences, de première et de seconde espèce, attachées au groupe dans le Chapitre I.

En effet le groupe continu d'isomorphie H de l'espace est défini par l'équation

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b^{-1}, \tag{22}$$

puisque le sous-groupe de H qui laisse invariant le point origine est le groupe adjoint et qu'il suffit de combiner ce sous-groupe avec les translations de première (ou de seconde) espèce.

Cela posé, supposons que les équations (22) définissent un groupe simplement transitif G′ de translations de l'espace; nous savons (n° **88**) que l'espace pouvant être regardé comme attaché au groupe G′, les deux groupes G et G′ sont isomorphes. Or les transformations T_a qui s'introduisent dans les formules (22) forment évidemment un groupe isomorphe (holoédrique ou mériédrique) de G′; comme G′ est simple, c'est que T_a peut être une transformation quelconque du groupe G, à moins que T_a ne soit toujours la transformation identique.

Si T_a était la transformation identique, G′ serait le groupe des translations de première espèce, et l'on retrouverait l'une des deux équipollences classiques. Il en serait de même si T_b se réduisait constamment à la transformation identique.

Il nous reste donc, comme seul cas à examiner, celui où T_a pouvant être une transformation quelconque de G, il en serait de même de T_b. Mais comme G′ ne dépend que de r paramètres, il faut qu'à chaque transformation T_a corresponde une transformation T_b déterminée; de plus, la composition de deux transformations (22)

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b^{-1}, \qquad T_{\xi'} = T_{a'} T_\xi T_{b'}^{-1},$$

devant donner une transformation de la forme

$$T_{\xi'} = T_{a''} T_\xi T_{b''}^{-1},$$

il en résulte que la relation

$$T_{a'} T_a = T_{a''}$$

entraîne

$$T_{b'} T_b = T_{b''};$$

autrement dit la correspondance à établir entre les transformations T_a

et T_b est un auto-isomorphisme du groupe G. A la transformation identique correspondant évidemment la transformation identique, il suffira de connaître la correspondance entre transformations infinitésimales.

Utilisons les paramètres canoniques de S. Lie et supposons que T_a engendre un sous-groupe à un paramètre t défini par

$$a^i = t\alpha^i \qquad (\alpha^i \text{ constants});$$

T_b engendrera un autre groupe à un paramètre défini par

$$b^i = t\beta^i \qquad (\beta^i \text{ constants}),$$

et l'on aura un groupe à un paramètre de translations

$$T_{\xi'} = T_{t\alpha} T_\xi T_{-t\beta}.$$

En particulier le point (ξ_0) décrira une géodésique, et l'on aura

$$T_{t\alpha} T_{\xi_0} T_{-t\beta} = T_{t\gamma} T_{\xi_0},$$

les γ^i étant des constantes convenablement choisies; cette égalité peut s'écrire

$$T_{t\alpha}(T_{\xi_0} T_{-t\beta} T_{\xi_0}^{-1}) = T_{t\gamma};$$

la transformation $T_{\xi_0} T_{-t\beta} T_{\xi_0}^{-1}$ peut se mettre sous la forme $T_{-t\overline{\beta}}$, en désignant par $\sum_i \overline{\beta^i} X_i f$ la transformation infinitésimale transformée de $\sum_i \beta^i X_i f$ par la transformation T_{ξ_0}. On a donc

$$T_{t\alpha} T_{-t\overline{\beta}} = T_{t\gamma},$$

d'où

$$\gamma^i = \alpha^i - \overline{\beta}^i.$$

Partons maintenant du point $T_{t_0\gamma} T_{\xi_0}$; la même translation que tout à l'heure le fera passer au point

$$T_{t\alpha} T_{t_0\gamma} T_{\xi_0} T_{-t\beta} = T_{(t+t_0)\gamma} T_{\xi_0},$$

d'où, en multipliant à droite par $T_{\xi_0}^{-1}$,

$$T_{t\alpha} T_{t_0\gamma} T_{-t\overline{\beta}} = T_{(t+t_0)\gamma} = T_{t_0\gamma} T_{t\gamma} = T_{t_0\gamma} T_{t\alpha} T_{-t\overline{\beta}},$$

d'où enfin

$$T_{t\alpha} T_{t_0\gamma} = T_{t_0\gamma} T_{t\alpha}.$$

Cette dernière relation prouve que les deux transformations infinitésimales de paramètres α^i et γ^i sont échangeables entre elles; *il en est donc de même des transformations infinitésimales de paramètres α^i et $\overline{\beta}^i$.*

Autrement dit *toute transformation infinitésimale du groupe est échangeable avec la transformation infinitésimale correspondante, ainsi qu'avec toutes les transformations transformées de celle-là par le groupe adjoint.*

La conclusion est maintenant facile à tirer. Partons d'une transformation infinitésimale *générale* Yf du groupe; soit $\overline{Y}f$ la transformation correspondante; étant échangeable avec la première, elle fait partie du sous-groupe abélien d'ordre l (rang du groupe) auquel appartient Yf (¹). Soit maintenant Uf une transformation arbitraire du groupe; $\overline{Y}f$ doit être échangeable avec la transformation transformée de Yf par Uf, c'est-à-dire on doit avoir

$$((UY)\overline{Y}) = 0.$$

Prenons successivement pour Uf les transformations $U_i f$ qui appartiennent aux différentes racines λ_i de l'équation caractéristique de Yf; on aura

$$\lambda_i (U_i \overline{Y}) = 0 \qquad \text{ou} \qquad (U_i \overline{Y}) = 0.$$

La transformation $\overline{Y}f$ étant échangeable avec *toutes* les transformations du groupe, doit être identiquement nulle, ce qui est absurde. On arrive donc à une impossibilité, ce qu'il fallait démontrer.

92. Si le groupe G est semi-simple, et composé par exemple de deux groupes simples de transformations S_a et Σ_α, on démontre d'une manière analogue l'existence de quatre équipollences absolues, correspondant à quatre groupes simplement transitifs de translations, à

(¹) E. Cartan, *Thèse*, p. 55 (théorème V).

savoir :

$$T_{\xi'} = T_{\xi} S_a \Sigma_\alpha,$$
$$T_{\xi'} = S_a T_{\xi} \Sigma_\alpha,$$
$$T_{\xi'} = \Sigma_\alpha T_{\xi} S_a,$$
$$T_{\xi'} = S_a \Sigma_\alpha T_{\xi};$$

la première et la dernière sont les équipollences classiques.

De même l'espace d'un groupe semi-simple décomposable en k groupes simples admet 2^k équipollences absolues satisfaisant aux conditions énoncées plus haut.

93. On peut se poser une deuxième question. Imaginons qu'il existe, dans un espace à connexion affine sans torsion, un ensemble linéaire de r translations infinitésimales indépendantes, ces translations n'engendrant pas un groupe. On pourra en déduire une équipollence absolue telle que :

1° Les propriétés 1° à 6° du n° **2** soient vérifiées;

2° Deux segments égaux d'une géodésique quelconque de l'espace soient équipollents.

Il suffira de regarder deux vecteurs infiniment petits comme équipollents s'ils peuvent être considérés comme les chemins décrits par deux points dans la même translation infinitésimale de l'ensemble.

La réciproque est vraie. La transformation ponctuelle infinitésimale qui fait décrire aux différents points de l'espace des vecteurs infiniment petits équipollents entre eux est évidemment une translation infinitésimale, puisque les trajectoires de cette transformation sont des géodésiques et que les segments infiniment petits décrits sur une même géodésique sont tous égaux entre eux.

La détermination de tous les espaces de Riemann admettant une équipollence absolue satisfaisant aux conditions énoncées ci-dessus a été faite par M. J.-A. Schouten et moi (¹). Je me borne à quelques

(¹) *Over Riemannsche meetkunden die een absoluut parallelisme toelaten.* (*Verslag Kon. Akad. van Wetensch. Amsterdam*, t. 35, 1926, p. 505-518.) Si l'on se borne aux solutions *irréductibles* du problème, il n'existe que les espaces de groupes simples et l'espace elliptique à 7 dimensions; ce dernier admet une infinité d'équipollences absolues.

indications sur ce problème pour un espace à connexion affine sans torsion quelconque.

Attachons aux différents points de l'espace un repère cartésien dont les r vecteurs unitaires représentent les vitesses du point considéré, supposé soumis à r translations particulières (indépendantes) de l'ensemble. On aura une translation infinitésimale de l'ensemble en faisant décrire à chaque point de l'espace un vecteur de composantes e^i *fixes* par rapport au repère attaché à ce point. Si les ω^i sont les coordonnées d'un point infiniment voisin du point considéré, on aura des relations de la forme

$$(\omega^i)' = \sum_{(jk)} S_{jk}{}^i[\omega^j \omega^k], \tag{23}$$

les $S_{jk}{}^i$ étant des fonctions convenablement choisies.

Toute géodésique est définie par des équations de la forme

$$\frac{\omega^1}{m^1} = \frac{\omega^2}{m^2} = \ldots = \frac{\omega^r}{m^r} = ds,$$

les m^i étant des constantes arbitraires et ds étant la longueur de l'arc élémentaire.

Les équations (23) expriment, sous une forme condensée, les relations

$$\delta\omega^i(d) - d\omega^i(\delta) = \sum_{j,\,k} S_{jk}{}^i \omega^j(\delta)\,\omega^k(d),$$

où s'introduisent deux symboles de différentiation échangeables entre eux. Prenons pour symbole δ celui du déplacement dû à la translation infinitésimale (e^i), le symbole d se rapportant à un déplacement indéterminé dans l'espace. On a

$$\omega^i(\delta) = e^i, \qquad d\omega^i(\delta) = 0,$$

et par suite

$$\delta\omega^i(d) = \sum_{j,\,k} S_{jk}{}^i e^j \omega^k(d).$$

Cette équation prouve que, par la translation considérée, le vecteur u^i subit l'accroissement élémentaire

$$\delta u^i = \sum_{j,\,k} S_{jk}{}^i e^j u^k.$$

Cela posé, considérons une géodésique quelconque et le vecteur, constamment équipollent à lui-même, qui lui est tangent,

$$u^i = m^i;$$

par la translation, ce vecteur devra conserver des composantes fixes; donc la différentielle de la somme

$$\sum_{j,\,k} S_{jk}{}^i e^j m^k$$

doit être nulle quand on se déplace dans la direction de la géodésique. Si nous posons

$$dS_{jk}{}^i = \sum_h S_{jk}{}^i{}_{|h}\,\omega^h, \tag{24}$$

nous aurons donc

$$\sum_{j,\,h,\,k} S_{jk}{}^i{}_{|h}\, e^j m^k m^h = 0.$$

Il en résulte les relations suivantes, qui expriment qu'on a bien affaire à des translations infinitésimales,

$$S_{jk}{}^i{}_{|h} + S_{jh}{}^i{}_{|k} = 0.$$

Comme on a

$$S_{jk}{}^i + S_{kj}{}^i = 0,$$

il en résulte que, l'indice i étant fixé, les quantités

$$S_{jk}{}^i{}_{|h} = S_{jkh}{}^i \tag{25}$$

sont les composantes d'un système de trivecteurs; chacune d'elles se reproduit, changée ou non de signe, suivant qu'on effectue sur les indices inférieurs une permutation impaire ou paire.

Si les quantités $S_{jkh}{}^i$ étaient toutes nulles, les coefficients $S_{jk}{}^i$ seraient tous constants et l'on retrouverait une équipollence absolue attachée à un groupe (n° **46**).

La dérivation extérieure des équations (23) donne, en égalant à zéro le coefficient de $[\omega^j \omega^k \omega^h]$,

$$S_{jkh}{}^{i} = -\frac{1}{3}\sum_{\rho}(S_{jk}{}^{\rho} S_{\rho h}{}^{i} + S_{kh}{}^{\rho} S_{\rho j}{}^{i} + S_{hj}{}^{\rho} S_{\rho k}{}^{i}). \tag{26}$$

La dérivation extérieure des équations (24) donnerait des relations entre les coefficients $S_{jk}{}^{i}$.

Un calcul facile donne le tenseur de courbure

$$R_{i}{}^{j}{}_{kh} = \frac{1}{12}\sum_{\rho}(2S_{kh}{}^{\rho} S_{\rho i}{}^{j} - S_{ik}{}^{\rho} S_{\rho h}{}^{j} + S_{ih}{}^{\rho} S_{\rho k}{}^{j}).$$

Il serait intéressant de poursuivre l'étude des espaces pour lesquels toutes les équations obtenues sont compatibles. En tout cas, pour $r = 2$, on n'obtient que les espaces de groupes, puisque le système de trivecteurs $S_{jkh}{}^{i}$ est nécessairement nul. Il en est de même pour $r = 3$, car, dans ce cas, en posant $S_{123}{}^{i} = a^i$, on a

$$dS_{12}{}^{i} = a^i \omega^3;$$

l'équation $\omega^3 = 0$ est donc complètement intégrable; par suite $S_{12}{}^{3} = 0$, d'où $a^3 = 0$, et de même $a^1 = a^2 = 0$: les $S_{ij}{}^{k}$ sont des constantes.

CHAPITRE V.

LA CONNEXION PROJECTIVE NORMALE D'UN ESPACE DE GROUPE.

I. — Définition de l'espace projectif d'un groupe.

94. Considérons les géodésiques de l'espace à connexion affine sans torsion attaché à un groupe. Elles permettent, comme on sait ([1]), de définir un espace à connexion projective normale admettant les mêmes géodésiques.

([1]) E. Cartan, *Sur les variétés à connexion projective* (*Bull. Soc. math.*, t. LII, 1924, p. 205-241). Je désigne ici par $\omega_i{}^{i}$, $\Omega_i{}^{i}$ ce que, dans le Mémoire cité, je désignais par $\omega_i{}^{i} - \omega_0{}^{0}$, $\Omega_i{}^{i} - \Omega_0{}^{0}$.

Attachons par exemple à chaque point de l'espace le repère cartésien de seconde espèce (n° **34**); la connexion affine sans torsion est définie par les composantes ω^i, ω_i^j, avec

$$(\omega^i)' = \sum_{(jk)} c_{jk}{}^i [\omega^j \omega^k],$$

$$\omega_i{}^j = \frac{1}{2} c_{ik}{}^j \omega^k.$$

La connexion projective normale sera définie par les composantes ω^i, ω_i^j, auxquelles il faudra joindre r nouvelles formes $\omega_i{}^0$. On a ici

$$\sum_i \Omega_i{}^i = 0,$$

puisque l'espace admet une unité de volume absolue. Les formes $\omega_i{}^0$ seront déterminées par la condition suivante :

Si l'on pose

$$(\omega_i{}^j)' = [\omega_i{}^0 \omega^j] + \sum_k [\omega_i{}^k \omega_k{}^j] - \sum_{(kh)} P_i{}^j{}_{kh} [\omega^k \omega^h],$$

on devra avoir

$$\sum_k P_i{}^k{}_{jk} = 0;$$

en outre, on aura

$$\sum_i [\omega^i \omega_i{}^0] = 0.$$

Soit alors

$$\omega_i^0 = \sum_k A_{ik} \omega^k \qquad (A_{ij} = A_{ji}).$$

On a

$$\sum_{(kh)} (R_i{}^j{}_{kh} - P_i{}^j{}_{kh}) [\omega^k \omega^h] = \sum_k A_{ik} [\omega^j \omega^k],$$

d'où

$$P_i{}^k{}_{jk} = R_i{}^k{}_{jk} + A_{ij},$$

et par suite, en tenant compte de (7) (n° **60**),

$$A_{ij} = \frac{1}{r-1} \sum_k R_i{}^k{}_{kj} = \frac{1}{4(r-1)} \sum_{k,h} c_{jk}{}^h c_{ih}{}^k = \frac{g_{ij}}{4(r-1)},$$

en désignant par g_{ij} les coefficients de la forme quadratique $\varphi(e)$ (n° **65**).

Finalement, on a

$$(1) \qquad \omega_i^0 = \frac{1}{4(r-1)} \sum_k g_{ik}\,\omega^k.$$

95. Pour définir la courbure projective de l'espace projectif normal attaché au groupe G, il faut, à côté des quantités P_{ihk}^{j}, calculer les formes

$$\Omega_i^0 = (\omega_i^0)' - \sum_k [\omega_i^k\,\omega_k^0].$$

Or nous avons vu que, dans l'espace à connexion affine sans torsion attaché au groupe, le tenseur g_{ij} est laissé invariant par le transport par parallélisme, autrement dit a son tenseur dérivé nul. On a donc

$$\sum_\rho (g_{i\rho}\,\omega_j^\rho + g_{j\rho}\,\omega_i^\rho) = 0.$$

On en déduit

$$4(r-1)\,\Omega_i^0 = \sum_{k,\rho} \left\{ g_{i\rho}[\omega^k\,\omega_k^\rho] - g_{k\rho}[\omega_i^\rho\,\omega^k] \right\} = 0.$$

Le déplacement projectif associé à un cycle élémentaire laisse donc invariant l'hyperplan formé par les sommets du $(r+1)$-èdre de référence autres que l'origine. Les points de cet hyperplan sont transformés par une transformation infinitésimale de la forme

$$\sum_{(\alpha\beta),i,k} P_{i\ \alpha\beta}^{k}\, u^i \frac{\partial f}{\partial u^k} p^{\alpha\beta},$$

en désignant par $p^{\alpha\beta}$ les composantes contravariantes de l'aire limitée par le cycle élémentaire. En remplaçant les $P_{i\ \alpha\beta}^{k}$ par leurs valeurs, la transformation homographique infinitésimale associée à un cycle élémentaire est

$$(2) \qquad \frac{1}{4} \sum_{(\alpha\beta),i,k,\rho} c_{\alpha\beta}^{\ \ \rho}\, c_{\rho i}^{\ \ k}\, p^{\alpha\beta} u^i \frac{\partial f}{\partial u^k} + \frac{1}{4(r-1)} \sum_{i,j,k} g_{ij}\, p^{jk} u^i \frac{\partial f}{\partial u^k}.$$

En particulier, la transformation associée au cycle dont toutes les composantes sont nulles, sauf $p^{\alpha\beta} = 4$, est

$$(3) \qquad \mathrm{U}_{\alpha\beta} f = \sum_{i,k,\rho} c_{\alpha\beta}^{\cdot\cdot\rho} c_{\rho i}^{\cdot\cdot k} u^i \frac{\partial f}{\partial u^k} + \frac{1}{(r-1)} \sum_i \left(g_{i\alpha} u^i \frac{\partial f}{\partial u^\beta} - g_{i\beta} u^i \frac{\partial f}{\partial u^\alpha} \right).$$

96. Les composantes de la courbure projective $\mathrm{P}_i^{\cdot k}{}_{\alpha\beta}$ peuvent être définies encore de la manière suivante. Appelons *produit scalaire* de deux transformations infinitésimales du groupe : $\mathrm{U}f = \Sigma u^i \mathrm{X}_i f$ et $\mathrm{V}f = \Sigma v^i \mathrm{X}_i f$, la quantité

$$\sum_{i,j} g_{ij} u^i v^j = \mathrm{U} \mid \mathrm{V}.$$

On a alors les relations

$$(4) \qquad (\mathrm{X}_i(\mathrm{X}_j\mathrm{X}_k)) - \frac{1}{r-1} \mathrm{X}_i \mid \mathrm{X}_j . \mathrm{X}_k f + \frac{1}{r-1} \mathrm{X}_i \mid \mathrm{X}_k . \mathrm{X}_j f = -4 \sum_\rho \mathrm{P}_i{}^\rho{}_{jk} \mathrm{X}_\rho f.$$

II. — Les groupes dont l'espace projectif est sans courbure.

97. Le premier problème qui se pose est celui de la détermination des groupes dont l'espace projectif est sans courbure (groupes à courbure projective nulle), ou, d'une manière plus intuitive, dont l'espace admet une représentation géodésique sur l'espace projectif ordinaire. Il faut et il suffit pour cela qu'on ait, quelles que soient les trois transformations infinitésimales $\mathrm{U}f$, $\mathrm{V}f$, $\mathrm{W}f$ du groupe,

$$(5) \qquad (\mathrm{U}(\mathrm{VW})) = \frac{1}{r-1} \mathrm{U} \mid \mathrm{V} . \mathrm{W}f - \frac{1}{r-1} \mathrm{U} \mid \mathrm{W} . \mathrm{V}f.$$

Cherchons d'abord ceux de ces groupes pour lesquels la forme $\varphi(e)$ est identiquement nulle : il faut alors que la courbure de l'espace affine sans torsion du groupe soit nulle. Nous avons obtenu (n° **90**) tous ces groupes.

Supposons maintenant que la forme $\varphi(e)$ ne soit pas identiquement nulle, et soit $\mathrm{Y}f$ une transformation infinitésimale particulière telle qu'on ait

$$\mathrm{Y} \mid \mathrm{Y} = r - 1.$$

On aura alors

$$(\mathrm{Y}(\mathrm{Y}\mathrm{X}_i)) = \mathrm{X}_i f - \frac{1}{r-1} \mathrm{Y} \mid \mathrm{X}_i . \mathrm{Y}f,$$

Les racines de l'équation caractéristique relatives à Yf ne sont pas toutes nulles, puisque la somme de leurs carrés est égale à $r-1$. Choisissons $r-1$ transformations infinitésimales de base, indépendantes de Yf, et appartenant chacune à une racine de l'équation caractéristique. On sait que si $X_i f$ et $X_j f$ appartiennent aux racines a_i et a_j, le crochet $(X_i X_j)$ appartient à la racine $a_i + a_j$ (¹). Il résulte de là que si $X_i f$ appartient à une racine a_i *différente de zéro*, le produit scalaire $Y \mid X_i$ est nul : si en effet nous posons $Yf = X_0 f$, la somme

$$Y \mid X_i = \sum_{\rho,\sigma} c_{0\rho}^{\;\;\sigma} c_{i\sigma}^{\;\;\rho}$$

aura chacun de ses termes nuls, sinon on devrait avoir

$$a_\rho = a_\sigma, \qquad a_i + a_\sigma = a_\rho,$$

d'où

$$a_i = 0.$$

De là résulte la formule générale

$$\big(Y(YX_i)\big) = X_i f,$$

valable si $a_i \neq 0$. Si a_i est racine simple, on a

$$(YX_i) = a_i X_i f,$$

d'où

$$a_i^2 = 1.$$

Si a_i est racine multiple, et si $X_i f, X'_i f, \ldots$ appartiennent à cette racine, on pourrait *a priori* penser qu'on a des relations de la forme

$$(YX_i) = a_i X_i f, \qquad (YX'_i) = a_i X'_i f + X_i f, \qquad \ldots;$$

mais cela serait contradictoire avec la formule

$$\big(Y(YX'_i)\big) = X'_i f.$$

Finalement, on voit que les racines non nulles de l'équation caractéristique sont toutes égales à $+1$ ou à -1, et que, pour toute transformation infinitésimale $X_i f$ appartenant à une de ces racines, on a

$$(YX_i) = a_i X_i f.$$

(¹) E. Cartan, *Thèse*, p. 41 (théorème XI).

Le carré scalaire $Y \mid Y$ étant égal à la somme des carrés des racines a_i, il faut qu'il y ait $r-1$ racines égales à ± 1 :

$$(6) \qquad (YX_i) = a_i X_i f \qquad (a_i^2 = 1;\ i = 1, 2, \ldots, r-1).$$

Le crochet de deux transformations $X_i f$, $X_j f$ appartenant à la même racine est nul, puisque la racine 2 ou -2 n'existe pas ; quant au crochet de deux transformations $X_i f$, $X_j f$ appartenant l'une à la racine $+1$, l'autre à la racine -1, il doit appartenir à la racine zéro, c'est-à-dire être proportionnel à Yf :

$$(7) \qquad (X_i X_j) = c_{ij} Yf \qquad (a_i + a_j = 0).$$

La formule (5) donne d'autre part

$$\big(X_i(YX_j)\big) = -\frac{1}{r-1} X_i \mid X_j . Yf,$$

ou, en supposant $a_i = 1$, $a_j = -1$,

$$c_{ij} = \frac{1}{r-1} X_i \mid X_j.$$

Or

$$X_i \mid X_j = \sum_{\rho,\sigma} c_{i\rho}^{\cdot\cdot\sigma} c_{j\sigma}^{\cdot\cdot\rho} = c_{i0}^{\cdot\cdot i} c_{ji}^{\cdot\cdot 0} + c_{ij}^{\cdot\cdot 0} c_{j0}^{\cdot\cdot j} = 2 c_{ij},$$

d'où

$$(r-3)\, c_{ij} = 0.$$

Si $r > 3$, tous les c_{ij} sont nuls. Si $r = 3$, on peut avoir $c_{12} \neq 0$.

98. Nous tirons de la discussion précédente la conclusion suivante :

Les groupes dont l'espace admet une représentation géodésique sur l'espace projectif ordinaire forment trois classes :

1° *Les groupes dont l'espace affine sans torsion a une courbure nulle ;*

2° *Les groupes dont la structure est définie par les formules*

$$(X_0 X_i) = a_i X_i f \qquad (a_i = \pm 1;\ i = 1, \ldots, r-1),$$
$$(X_i X_j) = 0 \qquad (i, j = 1, \ldots, r-1);$$

3° *Le groupe simple à trois paramètres dont la structure est*

$$(X_0 X_1) = X_1 f, \qquad (X_0 X_2) = -X_2 f, \qquad (X_1 X_2) = X_0 f.$$

L'espace d'un groupe de la première classe admet une représentation géodésique sur l'espace affine avec conservation du rapport des arcs d'une même géodésique.

L'espace du groupe de la troisième classe admet une représentation géodésique sur l'espace projectif ordinaire, la métrique sur chaque géodésique devenant cayleyenne (hyperbolique ou elliptique) : l'espace du groupe est en effet un espace de Riemann à courbure constante.

Quant aux géodésiques de l'espace d'un groupe de la seconde classe il est facile d'avoir leurs équations. En effet, les équations de structure sont de la forme

$$(\omega^0)' = 0,$$
$$(\omega^i)' = a_i[\omega^0 \omega^i];$$

on peut alors poser

$$\omega^0 = \frac{d\xi}{\xi}, \qquad \omega^i = \xi^{a_i} d\xi^i.$$

Les équations

$$\omega^i = C^i \omega^0$$

donnent, par intégration,

$$\xi^i = -\frac{C^i}{\xi} + D^i \qquad (a_i = 1),$$
$$\xi^j = \quad C^j \xi + D^j \qquad (a_j = -1);$$

la possibilité de la représentation géodésique sur l'espace projectif ordinaire devient évidente. Quant à la métrique sur chaque géodésique, elle est donnée par la formule

$$s = a \log \xi + b;$$

elle est cayleyenne, l'absolu étant sur chaque géodésique formé par les points d'intersection de la géodésique avec deux hyperplans fixes.

Remarquons que, parmi les groupes de cette seconde classe, se trouve le groupe des déplacements euclidiens du plan. Si l'on représente un point de l'espace à trois dimensions de ce groupe par la position d'une figure plane de forme invariable mobile dans son plan, les géodésiques de cet espace sont représentées par l'ensemble des positions qui se déduisent de l'une d'elles par rotation autour d'un point fixe (ou par translation parallèle à une direction fixe).

III. — Le groupe d'isomorphie de l'espace projectif d'un groupe.

99. Une transformation ponctuelle sera dite une « isomorphie » de l'espace projectif d'un groupe si elle laisse invariante la connexion projective de cet espace, *ou encore si elle laisse invariant l'ensemble des géodésiques de l'espace.* Toutes les transformations ponctuelles du groupe d'isomorphie affine H sont évidemment des isomorphies projectives.

Si le groupe G entre dans une des trois classes déterminées dans le paragraphe précédent, le groupe $\mathcal{H}$ d'isomorphie projective est identique (grâce à un choix convenable des variables) au groupe projectif général.

Il existe une méthode régulière pour trouver les équations de définition du groupe d'isomorphie projective $\mathcal{H}$, et par suite sa structure. Si l'on utilise, comme au paragraphe I, les repères cartésiens de seconde espèce, les composantes du tenseur de courbure projective sont des constantes. Déterminons alors toutes les transformations homographiques qu'on peut faire subir au repère sans changer ces composantes; il en résultera, dans le cas général, que certaines des relations linéaires qui existent, dans le cas du repère de seconde espèce, entre les ω^i et les composantes ω_i^j et ω_i^0 de la connexion projective, devront subsister avec le repère plus général obtenu. *Il se pourra que ces relations, par suite des conditions d'intégrabilité, ne soient plus compatibles avec ce repère général.* On sera ainsi conduit, de proche en proche, à trouver le groupe d'isotropie projective, d'où l'on déduira le groupe d'isomorphie projective.

La restriction énoncée dans la phrase soulignée ne se présentait pas dans la recherche du groupe d'isomorphie des espaces à connexion affine sans torsion pour lesquels le tenseur dérivé du tenseur de courbure est nul.

100. Les considérations générales précédentes seront un peu éclaircies par un exemple traité complètement.

Partons du groupe d'ordre 3 dont les équations de structure sont

$$(X_1X_2) = X_2f, \qquad (X_1X_3) = X_2f + X_3f, \qquad (X_2X_3) = 0.$$

La forme $\varphi(u^i)$ se réduit ici à $2(u^1)^2$, de sorte que le seul coefficient différent de zéro est

$$g_{11} = X_1 | X_1 = 2.$$

L'adoption du repère de seconde espèce conduit aux formules

$$\begin{aligned}
(\omega^1)' &= 0,\\
(\omega^2)' &= [\omega^1 \omega^2] + [\omega^1 \omega^3],\\
(\omega^3)' &= [\omega^1 \omega^3],
\end{aligned}$$

avec

$$\begin{array}{lll}
\omega_1^1 = 0, & \omega_2^1 = 0, & \omega_3^1 = 0;\\[4pt]
\omega_1^2 = \dfrac{1}{2}(\omega^2 + \omega^3), & \omega_2^2 = -\dfrac{1}{2}\omega^1, & \omega_3^2 = -\dfrac{1}{2}\omega^1;\\[4pt]
\omega_1^3 = \dfrac{1}{2}\omega^3, & \omega_2^3 = 0, & \omega_3^3 = -\dfrac{1}{2}\omega^1;\\[4pt]
\omega_1^0 = \dfrac{1}{4}\omega^1, & \omega_2^0 = 0, & \omega_3^0 = 0.
\end{array}$$

Les formes Ω_i^j et Ω_i^0 qui définissent le tenseur de courbure projective sont :

$$\begin{array}{lll}
\Omega_1^1 = 0, & \Omega_2^1 = 0, & \Omega_3^1 = 0,\\[4pt]
\Omega_1^2 = \dfrac{1}{2}[\omega^1 \omega^3], & \Omega_2^2 = 0, & \Omega_3^2 = 0,\\[4pt]
\Omega_1^3 = 0, & \Omega_2^3 = 0, & \Omega_3^3 = 0.\\
\Omega_1^0 = 0, & \Omega_2^0 = 0, & \Omega_3^0 = 0.
\end{array}$$

La transformation infinitésimale projective associée à un cycle arbitraire est, en appelant u^1, u^2, u^3 les coordonnées non homogènes d'un point,

$$-\frac{1}{2}[\omega^1 \omega^3]\, u^1 \frac{\partial f}{\partial u^2}. \tag{8}$$

Soit

$$\begin{aligned}
u^1 &= \frac{a_1^1 U^1 + a_2^1 U^2 + a_3^1 U^3}{1 + a_1^0 U^1 + a_2^0 U^2 + a_3^0 U^3},\\
u^2 &= \frac{a_1^2 U^1 + a_2^2 U^2 + a_3^2 U^3}{1 + a_1^0 U^1 + a_2^0 U^2 + a_3^0 U^3},\\
u^3 &= \frac{a_1^3 U^1 + a_2^3 U^2 + a_3^3 U^3}{1 + a_1^0 U^1 + a_2^0 U^2 + a_3^0 U^3}
\end{aligned}$$

la transformation homographique correspondant à un changement de repère; on en déduira

$$\omega^1 = a_1^1 \Omega^1 + a_2^1 \Omega^2 + a_3^1 \Omega^3,$$
$$\omega^2 = a_1^2 \Omega^1 + a_2^2 \Omega^2 + a_3^2 \Omega^3,$$
$$\omega^3 = a_1^3 \Omega^1 + a_2^3 \Omega^2 + a_3^3 \Omega^3.$$

La forme (8) devant être conservée, on voit déjà que ω^1 et ω^3 ne dépendent que de Ω^1 et Ω^3, que de plus le numérateur de u^1 ne dépend que de U^1; enfin, $\frac{\partial f}{\partial U^2}$ ne devant dépendre que de $\frac{\partial f}{\partial u^2}$, il faut que u^1 et u^3 ne dépendent pas de U^2, c'est-à-dire $a_2^0 = 0$.

On a donc

$$\frac{a_1^1 a_3^3 [\Omega^1 \Omega^3] a_1^1 U^1}{1 + a_1^0 U^1 + a_3^0 U^3} \frac{\partial f}{\partial u_2} = [\Omega^1 \Omega^3] U^1 \frac{a_2^2}{1 + a_1^0 U^1 + a_3^0 U^3} \frac{\partial f}{\partial u^2},$$

d'où

$$a_2^2 = (a_1^1)^2 a_3^3.$$

Les formules de transformation cherchées sont donc

$$(9) \qquad \left\{ \begin{aligned} u^1 &= \frac{a_1^1 U^1}{1 + a_1^0 U^1 + a_3^0 U^3}, \\ u^2 &= \frac{a_1^2 U^1 + (a_1^1)^2 a_3^3 U^2 + a_3^2 U^3}{1 + a_1^0 U^1 + a_3^0 U^3}, \\ u^3 &= \frac{a_1^3 U^1 + a_3^3 U^3}{1 + a_1^0 U^1 + a_3^0 U^3}; \end{aligned} \right.$$

elles donnent les transformations infinitésimales

$$u^1 \frac{\partial f}{\partial u^1} + 2u^2 \frac{\partial f}{\partial u^2}, \quad u^2 \frac{\partial f}{\partial u^2} + u^3 \frac{\partial f}{\partial u^3}, \quad u^1 \frac{\partial f}{\partial u^2}, \quad u^3 \frac{\partial f}{\partial u^2}, \quad u^1 \frac{\partial f}{\partial u^3},$$
$$u^1 \left(u^1 \frac{\partial f}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial f}{\partial u^2} + u^3 \frac{\partial f}{\partial u^3} \right),$$
$$u^3 \left(u^1 \frac{\partial f}{\partial u^1} + u^2 \frac{\partial f}{\partial u^2} + u^3 \frac{\partial f}{\partial u^3} \right).$$

Si l'on désigne par

$$\sum_{i,j} e_i^j u^i \frac{\partial f}{\partial u^j} + \sum_i e_i^0 u^i \left(\sum_k u^k \frac{\partial f}{\partial u^k} \right)$$

la transformation projective la plus générale laissant fixe l'origine et conservant les composantes du tenseur de courbure, on voit qu'on a

$$2e_1^1 - e_2^2 + e_3^3 = 0, \qquad e_2^1 = 0, \qquad e_3^1 = 0, \qquad e_2^3 = 0, \qquad e_2^0 = 0.$$

Les cinq quantités

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3, \quad \omega_2^1, \quad \omega_3^1, \quad \omega_2^3, \quad \omega_2^0$$

sont donc, avec le repère le plus général compatible avec les composantes données du tenseur de courbure, des combinaisons linéaires à coefficients fixes de ω^1, ω^2, ω^3; par suite, on a, comme avec le repère de seconde espèce,

$$2\omega_1^1 - \omega_2^2 + \omega_3^3 = 0,$$
$$\omega_2^1 = \omega_3^1 = \omega_2^3 = \omega_2^0 = 0.$$

La dérivation extérieure donne, en supposant toujours le repère le plus général compatible avec les composantes données du tenseur de courbure

$$4[\omega_1^0\omega^1] + 3[\omega_3^0\omega^3] = 0,$$
$$[\omega_3^0\omega^1] = 0.$$

Il faut donc poser

$$\omega_3^0 = 0, \qquad \omega_1^0 = \frac{1}{4}\omega^1.$$

Une nouvelle dérivation extérieure donne

$$[\omega^1\omega_1^1] = 0,$$

d'où

$$\omega_1^1 = 0.$$

Finalement, nous devrons prendre

$$\omega_1^1 = \omega_2^1 = \omega_3^1 = 0,$$
$$\omega_2^3 = 0, \qquad \omega_3^3 = \omega_2^2,$$
$$\omega_1^0 = \frac{1}{4}\omega^1, \qquad \omega_2^0 = \omega_3^0 = 0,$$

et il restera un repère dépendant de quatre paramètres arbitraires, avec les quatre composantes arbitraires ω_1^2, ω_2^2, ω_3^2, ω_1^3.

Les équations de structure du groupe d'isomorphie cherché sont donc

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned}
&(\omega^1)' = 0,\\
&(\omega^2)' = [\omega^1\omega_1^2] + [\omega^2\omega_2^2] + [\omega^3\omega_3^2],\\
&(\omega^3)' = [\omega^1\omega_1^3] + [\omega^3\omega_2^2],\\
&(\omega_1^2)' = [\omega_1^2\omega_2^2] + [\omega_1^3\omega_3^2] + \frac{1}{4}[\omega^1\omega^2] + \frac{1}{2}[\omega^1\omega^3],\\
&(\omega_2^2)' = 0,\\
&(\omega_3^2)' = 0,\\
&(\omega_1^3)' = [\omega_1^3\omega_2^2] + \frac{1}{4}[\omega^1\omega^3].
\end{aligned}\right.$$

Le groupe d'isomorphie projective $\mathcal{K}$ est à 7 paramètres; il se confond avec le groupe d'isomorphie affine H : toute transformation géodésique conserve la métrique de chaque géodésique.

Le groupe continu d'isotropie projective s'obtient en faisant dans les formules (9)

$$a_1^1 = 1, \qquad a_1^0 = a_3^0 = 0;$$

en réalité, il se confond avec le groupe continu d'isotropie affine. Le groupe d'isotropie contient en outre une famille continue de transformations obtenue en prenant $a_1^1 = -1$.

101. Il y a un cas général important : c'est celui où toute transformation projective qui laisse invariantes les composantes du tenseur de courbure laisse également invariant l'hyperplan à l'infini du repère cartésien de seconde espèce. Le groupe d'isotropie projective est alors confondu avec le groupe d'isotropie affine, et le groupe d'isomorphie projective $\mathcal{K}$ est identique au groupe H. La circonstance envisagée ne se produit pas immédiatement dans l'exemple du numéro précédent, mais elle finit par se produire, et le résultat final est le même.

Dans le cas où le groupe G est semi-simple et distinct du groupe simple à trois paramètres, la transformation infinitésimale projective associée à un cycle arbitraire engendre, comme nous le verrons plus loin (n° **104**), le groupe général des rotations, et par suite ne laisse invariant aucun autre hyperplan (ne passant pas par l'origine) que l'hyperplan à l'infini du repère cartésien de seconde espèce. Par suite, le groupe d'isomorphie projective $\mathcal{K}$ se confond avec le groupe H, et, d'après ce qui a été vu plus haut, le plus grand groupe *continu* de transformations géodésiques de l'espace du groupe est (nº **91**) formé des transformations

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b.$$

Il serait intéressant de savoir d'une manière précise s'il existe, en dehors des groupes dont l'espace projectif est sans courbure, d'autres groupes pour lesquels le groupe d'isomorphie projective $\mathcal{H}$ est plus grand que le groupe d'isomorphie affine H.

102. Une autre question importante est celle de l'*isomorphisme projectif* de deux groupes. Une condition nécessaire pour cet isomorphisme est qu'on puisse choisir les transformations infinitésimales de base des deux groupes de manière que les composantes $P_i{}^j{}_{kh}$ aient les mêmes valeurs numériques. La condition analogue est suffisante pour l'isomorphisme affine, parce que la connaissance des constantes $R_i{}^j{}_{kh}$ déterminait complètement le groupe d'isomorphie. Il n'en est plus nécessairement de même ici, et c'est une question qui demanderait à être étudiée. Si l'on se donne un système de constantes $P_i{}^j{}_{kh}$ (dont le tenseur contracté soit nul), la méthode indiquée au nº **100** permettrait de déterminer, s'ils existent, les groupes dont les constantes données définissent la structure projective; mais, s'il existe une solution, n'en existe-t-il qu'une, ou en existe-t-il plusieurs, voilà ce qui serait à élucider.

IV. — Groupe d'holonomie de l'espace projectif d'un groupe.

103. Le groupe d'holonomie d'un espace à connexion projective est le groupe formé par les transformations projectives associées à un cycle arbitraire issu d'un point donné. Si l'espace est sans courbure, le groupe d'holonomie se réduit à la transformation identique (ou mieux, c'est un groupe discontinu).

Nous allons nous borner à étudier le groupe d'holonomie de l'espace projectif d'un groupe semi-simple d'ordre $r > 3$.

La forme quadratique $\varphi(e)$ étant ici non dégénérée, nous pouvons choisir les transformations infinitésimales de base de manière à n'avoir que des termes carrés, avec le même coefficient que nous supposons égal à $-(r-1)$. Nous avons alors

$$X_i | X_i = -(r-1), \qquad X_i | X_j = 0 \qquad (i \neq j).$$

Le groupe adjoint

$$E_\alpha f = \sum_{i,j} c_{\alpha i}^{\cdot\cdot j} e^i \frac{\partial f}{\partial e^j}$$

laissant invariante la forme $\varphi(e)$, il en résulte

$$c_{\alpha i}^{\cdot\cdot j} = - c_{\alpha j}^{\cdot\cdot i}.$$

Nous écrirons $c_{\alpha ij}$ au lieu de $c_{\alpha i}^{\cdot\cdot j}$; les quantités c_{ijk} deviennent alors les composantes d'un système de trivecteurs. On a de plus

$$X_i | X_i = - \sum_{h,k} (c_{ihk})^2 = -2 \sum_{(hk)} (c_{ihk})^2 = -(r-1),$$

$$X_i | X_j = -2 \sum_{(hk)} c_{ihk} c_{jhk} = 0.$$

Par suite,

$$\sum_{(hk)} (c_{ihk})^2 = \frac{r-1}{2}, \qquad \sum_{(hk)} c_{ihk} c_{jhk} = 0 \qquad (i \neq j).$$

La transformation infinitésimale projective $U_{\alpha\beta} f$ (nº **95**) s'écrit ici

$$U_{\alpha\beta} f = \sum_{(hk),\rho} c_{\alpha\beta\rho} c_{hk\rho} \left(u^h \frac{\partial f}{\partial u^k} - u^k \frac{\partial f}{\partial u^h} \right) - u^\alpha \frac{\partial f}{\partial u^\beta} + u^\beta \frac{\partial f}{\partial u^\alpha}.$$

Nous poserons, pour abréger,

$$u^h \frac{\partial f}{\partial u^k} - u_k \frac{\partial f}{\partial u^h} = V_{hk} f = - V_{kh} f,$$

et nous avons

$$U_{\alpha\beta} f = - V_{\alpha\beta} f + \sum_{(hk),\rho} c_{\alpha\beta\rho} c_{hk\rho} V_{hk} f.$$

104. Les transformations infinitésimales $U_{\alpha\beta} f$ sont les opérations qui engendrent le groupe d'holonomie. Or on a, i étant un indice donné,

$$\sum_{(\alpha\beta)} c_{i\alpha\beta} U_{\alpha\beta} f = - \sum_{(\alpha\beta)} c_{i\alpha\beta} V_{\alpha\beta} f + \frac{r-1}{2} \sum_{(hk)} c_{ihk} V_{hk} f = \frac{r-3}{2} \sum_{(\alpha\beta)} c_{i\alpha\beta} V_{\alpha\beta} f.$$

Le groupe d'holonomie contient donc les r transformations infinitésimales

$$\sum_{(hk)} c_{ihk} V_{hk} f,$$

et par suite, d'après l'expression de $U_{\alpha\beta} f$, *toutes les rotations* $V_{\alpha\beta} f$. Cela veut dire d'une manière précise qu'étant donné un point quelconque de l'espace projectif, le groupe d'holonomie, *avec un repère convenablement choisi ayant ce point pour origine*, contient toutes les transformations infinitésimales $V_{\alpha\beta} f$.

D'autre part, les relations

$$\omega_i^j + \omega_j^i = 0, \qquad \omega_i^0 = -\frac{1}{4}\omega^i,$$

qui existent avec les repères choisis, montrent que l'espace peut être regardé comme un espace non holonome dont le groupe fondamental est le groupe projectif de la quadrique Q

$$(u^1)^2 + (u^2)^2 + \ldots + 4(u^0)^2 = 0;$$

en effet, quand on fait le développement sur l'espace projectif attaché à un point, chaque repère se déduit du repère infiniment voisin par une transformation de ce groupe.

Des deux résultats obtenus résulte que le groupe d'holonomie est un groupe de déplacements cayleyens (l'absolu étant la quadrique Q) qui contient une rotation infinitésimale arbitraire autour d'un point arbitraire. On en déduit immédiatement qu'il contient tous les déplacements cayleyens.

Par suite, *le groupe d'holonomie de l'espace projectif d'un groupe semi-simple d'ordre supérieur à 3 est le groupe des déplacements cayleyens par rapport à une quadrique non dégénérée prise comme absolu.*

Si le groupe est à paramètres réels et que la forme $\varphi(e)$ soit définie négative (ce qui peut se réaliser pour chaque structure semi-simple complexe), le groupe d'holonomie est le groupe des déplacements cayleyens *elliptiques*. Pour un groupe à paramètres réels, on n'a jamais le groupe des déplacements cayleyens hyperboliques.

V. — L'espace conforme d'un groupe semi-simple.

105. L'espace à connexion affine sans torsion d'un groupe semi-simple étant un espace de Riemann, on peut considérer l'espace à connexion conforme normale qui lui est attaché. On démontre, par des procédés et des calculs analogues à ceux qui viennent d'être employés, les deux théorèmes suivants :

1. *Si l'ordre du groupe est supérieur à* 3, *le plus grand groupe continu de transformations conformes de l'espace du groupe est formé des transformations*

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b.$$

2. *Si l'ordre du groupe est supérieur à* 3, *le groupe d'holonomie de l'espace conforme du groupe est le groupe des transformations conformes qui laissent invariante une hypersphère fixe (groupe des déplacements non euclidiens).*

Si l'ordre est égal à 3, et dans ce cas seulement, l'espace conforme du groupe est sans courbure et son groupe d'holonomie se réduit par suite à la transformation identique.

Le premier théorème signifie que le groupe continu des transformations ponctuelles qui conservent l'angle φ de deux directions de symboles Xf et Yf, angle donné par

$$\cos\varphi = \frac{X \mid Y}{\sqrt{X \mid X . Y \mid Y}},$$

est formé des transformations

$$T_{\xi'} = T_a T_\xi T_b.$$