RENDICONTI
del
SEMINARIO MATEMATICO
della
UNIVERSITÀ DI PADOVA

ENRICO MAGENES

Sul minimo semi forte degli integrali di Fubini-Tonelli

Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, tome 20 (1951), p. 401-424

<http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1951__20__401_0>

SUL MINIMO SEMI FORTE DEGLI INTEGRALI DI FUBINI - TONELLI

Memoria (*) *di* ENRICO MAGENES (*a Padova*).

In un recente lavoro [11] (1) ho studiato il minimo relativo *debole* nel problema cosidetto *a punti terminali fissi* per gli integrali di FUBINI-TONELLI

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx\, dz$$

$$I(y) = \int_a^b \int_a^b f(x, z, y(x), y(z), y'(x), y'(z))\, dx\, dz$$

dando condizioni sufficienti analoghe a quelle di EULERO, LEGENDRE e JACOBI per gli integrali classici del Calcolo delle Variazioni.

Assai più complesso appare lo studio del minimo *forte*, che è tra l'altro connesso a difficoltà, ancora non sormontate, sulle condizioni necessarie e sufficienti per la semicontinuità di $I(y_1, y_2)$ e di $I(y)$ sia su una curva che in tutto il campo: difficoltà già da tempo messe in rilievo da S. FAEDO [2 e 4] e da me [8 e 10] e tra le quali è da ricordare qui l'impossibilità di esprimere condizioni sufficienti per la semicontinuità (le quali ovviamente interessano anche problemi di minimo *forte*) *solo* attraverso le derivate parziali $f_{y_1' y_1'}$ e $f_{y_2' y_2'}$ della funzione f e le cosidette funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ di WEIERSTRASS, introdotte dal FAEDO [10].

(*) Pervenuta in Redazione il 30 settembre 1951.

(1) I numeri entro parentesi quadra si riferiscono alla Bibliografia finale.

Mi è sembrato perciò opportuno, nel proseguire ulteriormente lo studio dei problemi di minimo relativo per $I(y_1, y_2)$ e $I(y)$, prendere per prima cosa in esame il minimo *semiforte* e vedere quali difficoltà esso presenti.

Dimostrerò in questo lavoro che accanto alle condizioni di Eulero e alla positività della variazione seconda sono sufficienti per il minimo *semiforte* due condizioni che si esprimono *solamente* attraverso le $f_{y_1' y_1'}$ e $f_{y_2' y_2'}$ e le funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ e che ho chiamato rispettivamente condizioni di Legendre e di Weierstrass generalizzate.

Mi sono servito per questo di un metodo di recente ideato da E. J. Mc Shane [12] per il minimo *debole* nei problemi di Bolza e successivamente esteso al minimo *semiforte* da F. G. Myers [13] e al minimo *forte* da M. R. Hestenes [6]; esso si presta particolarmente bene per lo studio di $I(y_1, y_2)$ e $I(y)$ perchè fa uso direttamente della positività della variazione seconda senza ricorrere alla condizione di Jacobi, espressa attraverso la considerazione dell' equazione di Jacobi e di un opportuno sistema di soluzioni associate di essa (²), e ciò ha importanza nel caso di $I(y_1, y_2)$ e di $I(y)$, per le difficoltà che si incontrano nello studio della equazione di Jacobi e che ho già messo in rilievo nel lavoro [11].

Per brevità mi limiterò a trattare solo $I(y_1, y_2)$; gli stessi risultati valgono anche per $I(y)$ e gli enunciati vanno ovviamente modificati secondo la nomenclatura abituale (si vedano [9 e 11]).

1. – Diremo *campo* A un insieme di punti dello spazio (x, z, y_1, y_2) che sia il prodotto topologico $A_1 x A_2$ di due insiemi A_1 del piano (x, y_1) e A_2 del piano (z, y_2) contenenti ciascuno i

(²) All' equazione di Jacobi ricorre sia il classico metodo del « campo di estremali » (v. ad es. [1]) che quello più recente ideato da E. E. Levi [7 e 14]; e in realtà nello studio del minimo relativo semiforte di $I(y_1, y_2)$ e di $I(y)$ questi metodi mi si sono rivelati meno utili. Quanto al metodo del Tonelli [15; vol. II, pag. 576 e seg.] che si basa sui teoremi di esistenza « in piccolo » del minimo *assoluto*, presenta anch' esso per $I(y_1, y_2)$ e $I(y)$ notevoli difficoltà, connesse con le osservazioni già da me fatte in [9; pag. 84 e seg.].

propri punti di accumulazione al finito. Per tutti gli (x, z, y_1, y_2) di A e per ogni valore di y'_1 e di y'_2 sia definita la funzione $f(x, z, y_1, y_2, y'_1, y'_2)$ che supporremo continua insieme alle sue derivate parziali dei primi due ordini.

Diremo *curva ordinaria* C ogni coppia di funzioni $y_1 = y_1(x)$, $a \leq x \leq b$, $y_2 = y_2(z)$, $c \leq z \leq d$, assolutamente continue, tali che i punti $(x, y_1(x))$ e $(z, y_2(z))$ appartengano rispettivamente ad A_1 e A_2 ed esista finito l'integrale secondo LEBESGUE

$$I(y_1, y_2) = \int_a^b \int_c^d f(x, z, y_1(x), y_2(z), y'_1(x), y'_2(z))\, dx\, dz .$$

Il problema che noi ci poniamo è il seguente: data una curva $\bar{C}(\bar{y}_1(x), a \leq x \leq b;\ \bar{y}_2(z), c \leq z \leq d)$ di *classe* 1 (vale a dire tale che $\bar{y}_1(x)$ e $\bar{y}_2(z)$ abbiamo derivate prime continue) ed interna al campo A ([3]), e fissato un numero positivo N, trovare condizioni sufficienti perchè $\bar{C}$ sia *minimante relativa semiforte propria* per $I(y_1, y_2)$ nella classe K delle curve ordinarie C *aventi gli stessi estremi di* $\bar{C}$, vale a dire perchè si possa determinare un $\rho > 0$, tale che per tutte le curve ordinarie C $(y_1(x), a \leq x \leq b,\ y_2(z)\ c \leq z \leq d)$ soddisfacenti alle

$$(1)\quad y_1(a) = \bar{y}_1(a),\ y_1(b) = \bar{y}_1(b),\ y_2(c) = \bar{y}_2(c),\ y_2(d) = \bar{y}_2(d)$$

$$(2)\qquad |y_1(x) - \bar{y}_1(x)| \leq \rho,\ |y_2(z) - \bar{y}_2(z)| \leq \rho$$

$$a \leq x \leq b \qquad\qquad c \leq z \leq d$$

$$(3)\quad \begin{cases} |y'_1(x) - \bar{y}'_1(x)| \leq N & \text{quasi dappertutto in } (a, b) \\ |y'_2(z) - \bar{y}'_2(z)| \leq N & \text{»}\quad\text{»}\quad\text{»}\ (c, d)\,, \end{cases}$$

si abbia

$$I(y_1, y_2) \geq I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$$

il segno di eguaglianza valendo solo se la curva C coincide con $\bar{C}$.

([3]) Vale a dire per cui i punti $(x, \bar{y}_1(x))$ e $(z, \bar{y}_2(z))$ siano rispettivamente interni ad A_1 e A_2.

Supporremo che la curva $\overline{C}$ soddisfi alle seguenti condizioni:

a) *Condizione di* Eulero: *sia un'estremale, cioè soddisfi al sistema di equazioni integro-differenziali*:

$$\left\{\begin{aligned} &\int_c^d f_{y_1}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dz - \frac{d}{dx}\int_c^d f_{y_1'}(x, z, \ldots)\, dz = 0 \\ &\int_a^b f_{y_2}(x, z, y_1(x), y_2(z), y_1'(x), y_2'(z))\, dx - \frac{d}{dz}\int_a^b f_{y_2'}(x, z, \ldots)\, dx = 0\,. \end{aligned}\right.$$

b) *Condizione di* Legendre *generalizzata*: *sia*

$$f_{y_1' y_1'}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), y_2') > 0 \tag{4}$$

per $\quad a \leq x \leq b, c \leq z \leq d, \mid y_2' - \bar{y}_2'(z) \mid \leq N;$

$$f_{y_2' y_2'}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z)) > 0 \tag{4'}$$

per $\quad a \leq x \leq b, \quad c \leq z \leq d.$

c) *Condizione di* Weierstrass *generalizzata*: *sia*

$$\mathcal{E}_1(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), y_2'; y_1') > 0 \tag{5}$$

per $a \leq x \leq b, c \leq z \leq d, \mid y_2' - \bar{y}_2'(z) \mid \leq N, 0 < \mid y_1' - \bar{y}_1'(x) \mid \leq N,$

$$\mathcal{E}_2(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z); y_2') > 0 \tag{5'}$$

per $\quad a \leq x \leq b, \quad c \leq z \leq d, \quad 0 < \mid y_2' - \bar{y}_2'(z) \mid \leq N,$

le funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ (di Weierstrass) essendo al solito definite da

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_1(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'; Y_1') &= f(x, z, y_1, y_2, Y_1', y_2') - \\ &- f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - (Y_1' - y_1')\, f_{y_1'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'), \\ \mathcal{E}_2(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'; Y_2') &= f(x, z, y_1, y_2, y_1', Y_2') - \\ &- f(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') - (Y_2' - y_2')\, f_{y_2'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2')\,. \end{aligned}$$

d) *Positività della variazione seconda* $I_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2; \eta_1, \eta_2)$ *lungo* $\bar{C}$: *sia*

$$(6)\qquad I_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2; \eta_1, \eta_2) = \int_a^b\int_c^d [f_{y_1 y_1}\eta_1^2 + 2 f_{y_1 y_1'}\eta_1\eta_1' +$$

$$+ f_{y_1' y_1'}\eta_1'^2 + f_{y_2 y_2}\eta_2^2 + 2 f_{y_2 y_2'}\eta_2\eta_2' + f_{y_2' y_2'}\eta_2'^2 +$$

$$+ 2 f_{y_1 y_2}\eta_1\eta_2 + 2 f_{y_1' y_2}\eta_1'\eta_2 + 2 f_{y_1' y_2'}\eta_1'\eta_2' +$$

$$+ 2 f_{y_1 y_2'}\eta_1\eta_2'] \, dx\, d\xi > 0$$

per ogni variazione prima (smorzata) $(\eta_1(x), \eta_2(\xi))$ *non identicamente nulla,* cioè per ogni coppia di funzioni $\eta_1(x)$ e $\eta_2(\xi)$ assolutamente continue e con derivate prime a quadrato sommabile rispettivamente in (a, b) e (c, d), non ambedue identicamente nulle, soddisfacenti alle $\eta_1(a) = \eta_1(b) = \eta_2(c) = \eta_2(d) = 0$; gli argomenti di $f_{y_1 y_1}, f_{y_2 y_2'}, \ldots$ in (6) essendo $(x, \xi, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(\xi), \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(\xi))$.

Dimostreremo allora nei prossimi numeri il seguente

Teorema: *Se* $\bar{C}$ *soddisfa alle condizioni* $a), b), c)$ e $d)$ *essa è minimamente relativa semiforte per* $I(y_1, y_2)$ *nella classe* K.

2. - Premettiamo alcuni lemmi.

Lemma I: *Esistono, nelle ipotesi dette, due numeri positivi* ρ_1 *ed* ε *per cui risulta*:

$$(7)\qquad \mathcal{E}(x, \xi, y_1, y_2, y_1', y_2'; Y_1') > \varepsilon |Y_1' - y_1'|^2$$

$$(8)\qquad f_{y_1' y_1'}(x, \xi, y_1, y_2, y_1', y_2') > 0$$

per $a \leq x \leq b$, $c \leq \xi \leq d$, $|y_1 - \bar{y}_1(x)| \leq \rho_1$, $|y_2 - \bar{y}_2(\xi)| \leq \rho_1$, $|y_1' - \bar{y}_1'(x)| \leq \rho_1$, $|y_2' - \bar{y}_2'(\xi)| \leq N$, $0 < |Y_1' - y_1'| \leq N$;

$$(7') \qquad \mathcal{E}_1(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2'; Y_2') > \varepsilon\, |Y_2' - y_2'|^2 > {}^2$$

$$(8') \qquad f_{y_2' y_2'}(x, z, y_1, y_2, y_1', y_2') > 0$$

per $a \leq x \leq b$, $c < z < d$, $|y_1 - \bar{y}_1(x)| \leq \rho_1$, $|\bar{y}_2 - y_2(z)| \leq \leq \rho_1$, $|y_1' - \bar{y}_1'(x)| \leq \rho_1$, $|y_1' - \bar{y}_2'(z)| \leq \rho_1$, $0 < |Y_2' - y_2'| \leq N$.

La dimostrazione si ottiene mediante un ragionamento semplice e ormai abituale, in virtù alle condizioni b) e c) (si veda ad es. [7; pag. 180]) (4).

Lemma II: *Per ogni $\sigma > 0$ e $< N$ si può determinare un $\mu > 0$ tale che sia*

$$(9) \qquad \mathcal{E}_1(x, z, y_1, y_2, \bar{y}_1'(x), y_2'; Y_1') > \mu\, |Y_1' - \bar{y}_1'(x)|$$

per $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, $|y_1 - \bar{y}_1(x)| \leq \rho_1$, $|y_2 - \bar{y}_2(z)| \leq \rho_1$,

$$|y_2' - \bar{y}_2'(z)| \leq N, \quad \sigma \leq |Y_1' - \bar{y}_1'(x)| \leq N;$$

$$(9') \qquad \mathcal{E}_2(x, z, y_1, y_2, \bar{y}_1'(x), \bar{y}_2'(z); Y_2') > \mu\, |Y_2' - \bar{y}_2'(z)|$$

per $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, $|y_2 - \bar{y}_1(x)| \leq \rho_1$, $|y_2 - \bar{y}_2(z)| \leq \rho_1$,

$$\sigma \leq |Y_2' - \bar{y}_2'(z)| \leq N$$

ρ_1 essendo il numero di cui al lemma I.

Il *lemma* II infatti altro non è che un noto teorema di E. E. Levi enunciato per le funzioni $\mathcal{E}_1$ ed $\mathcal{E}_2$ (si veda ad es. [7; pag. 184] oppure meglio [15; vol. I pag. 351]).

3. — Iniziamo ora la dimostrazione del teorema supponendo per assurdo che esista una successione di curve ordinarie

(4) Si potrebbe anche fare un ragionamento per assurdo analogo a quello fatto da Myers nel lemma 8.1 di [13].

$\{ C_q (y_{1,q}(x), a \leq x \leq b;\ y_{2,q}(z), c \leq z \leq d) \}$ distinte dalla $\overline{C}$, aventi gli stessi estremi della $\overline{C}$, tali che sia

$$(10)\quad \begin{cases} |y'_{1,q}(x) - \bar{y}'_1(x)| \leq N & \text{quasi-dappertutto in } (a,b) \\ |y'_{2,q}(z) - \bar{y}'_2(z)| \leq N & \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \ (c,d) \end{cases}$$

$$(10')\quad \begin{cases} \lim\limits_{q \to \infty} y_{1,q}(x) = \bar{y}_1(x) & \text{uniformemente in } (a,b) \\ \lim\limits_{q \to \infty} y_{2,q}(z) = \bar{y}_2(z) & \text{»} \quad \text{»} \ (c,d) \end{cases}$$

e inoltre

$$(11)\qquad I(y_{1,q}, y_{2,q}) \leq I(\bar{y}_1, \bar{y}_2).$$

Dimostreremo anzitutto il

Lemma III: *Nelle ipotesi dette risulta*

$$\min \lim_{q \to \infty} \left\{ I(y_{1,q}, y_{2,q}) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) \right\} =$$

$$= \min \lim_{q \to \infty} \int_a^b \int_c^d \Big[\mathcal{E}_1 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y'_{2,q} ; y'_{1,q}) +$$

$$+ \mathcal{E}_2 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2 ; y'_{2,q}) \Big] dx\, dz\,.$$

Infatti è

$$(12)\qquad I(y_{1,q}, y_{2,q}) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) =$$

$$= \int_a^b \int_c^d \Big[\mathcal{E}_1 (x, z, y_{1,q}, y_{1,q}, \bar{y}'_1, y'_{2,q} ; y'_{1,q}) +$$

$$+ \mathcal{E}_2 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2 ; y'_{2,q}) \Big] dx\, dz +$$

$$+\int_a^b\int_c^d\left[f(x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) - f(x, z, \bar{y}_1, \bar{y}_2, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2)\right] dx\, dz +$$

$$+\int_a^b\int_c^d (y'_{1,q} - \bar{y}'_1)\, f_{y'_1}(x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y'_{1,q})\, dx\, dz +$$

$$+\int_a^b\int_c^d (y'_{2,q} - \bar{y}'_2)\, f_{y'_2}(x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2)\, dx\, dz\,.$$

Il secondo integrale del secondo membro di (12) tende ovviamente a zero al tendere di q all'infinito, poichè f è continua; il terzo integrale si può anche scrivere così

$$(13)\quad \left[\int_a^b y'_{1,q}(x)\, F(x, y_{1,q}(x))\, dx - \int_a^b \bar{y}'_1(x)\, F(x, \bar{y}_1(x))\, dx\right] +$$

$$+\left[\int_a^b \bar{y}'_1(x)\, F(x, \bar{y}_1(x))\, dx - \int_a^b \bar{y}'_1(x)\, F(x, y_{1,q}(x))\, dx\right]$$

dove si ponga

$$F(x, y_1) = \int_c^d f_{y'_1}(x, z, y_1, y_{2,q}(z), \bar{y}'_1(x), y'_{2,q}(z))\, dz\,.$$

Evidentemente $F(x, y_1)$ dipende da $y_{2,q}(z)$; però *qualunque* sia q, purchè sufficientemente grande, risulta

$$F(x, y_1) \leq L\,(d - c)$$

dove L è il massimo modulo di $f_{y'_1}$ per $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, $|y_1 - \bar{y}_1(x)| \leq 1$, $|y_2 - \bar{y}_2(z)| \leq 1$, $|y'_1 - \bar{y}'_1(x)| \leq N$, $|y'_1 - \bar{y}'_2(z)| \leq N$.

Inoltre per noti teoremi è possibile dimostrare (5) che $F(x, y_1)$ è funzione continua rispetto a (x, y_1), esiste la $\frac{\partial F}{\partial x}$ ed è inoltre continua rispetto a (x, y_1), e infine che esiste un numero H tale che *qualunque* sia q, purchè sufficientemente grande, risulti

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x}\right| \leq H .$$

Ma allora al funzionale $\int_a^b y_1'(x)\, F(x, y_1(x))\, dx$ è applicabile un risultato di S. Faedo [3; pagg. 231-232] «sull'uguale continuità» degli integrali di linea del Calcolo delle Variazioni e si ottiene perciò che la prima parentesi quadra in (13) tende a zero al tendere di q all'∞.

Analogamente si dimostra per un altro risultato di S. Faedo [3; pag. 232] che anche la quantità dentro la seconda parentesi quadra in (13) tende a zero al tendere di q all'∞.

In modo analogo si può poi vedere che tende pure a zero il quarto integrale di (12), sicchè il lemma è dimostrato.

Segue allora di qui il seguente

Lemma IV: *È possibile estrarre dalla successione* $\{C_q\}$ *una sottosuccessione, che per semplicità possiamo supporre essere la stessa* $\{C_q\}$, *tale che si abbia anche*

$$\lim_{q \to \infty} y_{1,q}'(x) = \bar{y}_1'(x) \qquad \textit{quasi dappertutto in } (a, b)$$

$$\lim_{q \to \infty} y_{2,q}'(z) = \bar{y}_2'(z) \qquad \text{»} \qquad \text{»} \qquad \text{»} \quad (c, d)$$

(5) Le dimostrazioni sono analoghe a quelle svolte per risultati analoghi a pag. 14 e seg. di [8]; sarà bene ricordare anche che in virtù della Condizione b) esistono continue le $\bar{y}_1''(x)$ e $\bar{y}_2''(z)$ [9; pag. 69].

Infatti dai *lemmi* I e III segue che è

$$\min_{q \to \infty} \lim I(y_{1,q}, y_{2,q}) \geq I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$$

e quindi per la (11)

$$\lim_{q \to \infty} I(y_{1,q}, y_{2,q}) = I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) . \tag{14}$$

Dal *lemma* III ricaviamo allora che è pure

$$\lim_{q \to \infty} \int_a^b \int_c^d \Big[\mathcal{E}_1 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y'_{2,q}; y'_{1,q}) +$$

$$+ \mathcal{E}_2 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2; y'_{2,q}) \Big] dx\, dz = 0 .$$

Ma $\mathcal{E}_1 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y'_{2,q}; y'_{2,q})$ ed $\mathcal{E}_2 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2, y'_{2,q})$ per il *lemma* I sono non negative, sicchè ne segue che

$$\mathcal{E}_1 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y'_{2,q}; y'_{1,q}) + \mathcal{E}_2 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2; y'_{2,q})$$

converge in misura a zero nel rettangolo R $[a \leq x \leq b,$ $c \leq z \leq d]$, cosa che implica l'esistenza di una sottosuccessione estratta dalla $\{C_q\}$, che supporremo per semplicità essere la $\{C_q\}$ stessa, per la quale è

$$\lim_{q \to \infty} \Big[\mathcal{E}_1 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y'_{2,q}; y'_{1,q}) +$$

$$+ \mathcal{E}_2 (x, z, y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2; y'_{2,q}) \Big] = 0$$

quasidappertutto in R; e quindi per il *lemma* II

$$\lim_{q \to \infty} \Big[| y'_{1,q}(x) - \bar{y}'_1(x) | + | y'_{2,q}(z) - \bar{y}'_2(z) | \Big] = 0$$

quasi-dappertutto in R, dal che si deduce

$$\lim_{q\to\infty} y'_{1,q}(x) = \bar{y}'_1(x) \qquad \text{quasi-dappertutto in } (a, b)$$

$$\lim_{q\to\infty} y'_{2,q}(z) = \bar{y}'_2(z) \qquad \text{»} \quad \text{»} \quad \text{»} \; (c, d)$$

4. - Consideriamo ora, per ogni q, il numero positivo K_q definito dalle

$$(15) \quad K_q^2 = \left(\max_{(a,b)} |y_{1,q}(x) - \bar{y}_1(x)| \right)^2 + \int_a^b |y'_{1,q}(x) - \bar{y}'_1(x)|^2 dx +$$

$$+ \left(\max_{(c,d)} |y_{2,q}(z) - \bar{y}_2(z)| \right)^2 + \int_c^d |y'_{2,q}(z) - \bar{y}'_2(z)|^2 dz .$$

K_q è certo positivo, altrimenti C_q coinciderebbe con C. Dopo di che si ponga

$$(16) \quad \begin{cases} \eta_{1,q}(x) = \dfrac{y_{1,q}(x) - \bar{y}_2(x)}{K_q} & a \leq x \leq b \\[2ex] \eta_{2,q}(z) = \dfrac{y_{2,q}(z) - \bar{y}_2(z)}{K_q} & c \leq z \leq d . \end{cases}$$

Si ha per (15)

$$(17) \quad \left(\max_{(a,b)} |\eta_{1,q}(x)| \right)^2 + \int_a^b |\eta'_{1,q}(x)|^2 dx +$$

$$+ \left(\max_{(c,d)} |\eta_{2,q}(z)| \right)^2 + \int_c^d |\eta'_{2,q}(z)|^2 dz = 1 .$$

Si può allora dimostrare (si veda l'analogo ragionamento di Mc Shane in [12]) che le $\{\eta_{1,q}(x)\}$ e $\{\eta_{2,q}(z)\}$ sono equiassolutamente continue rispettivamente in (a, b) e (c, d), sicchè se ne possono estrarre due successioni, che supporremo essere le $\{\eta_{1,q}(x)\}$ e $\{\eta_{2,q}(z)\}$ stesse, convergenti uniformemente rispettivamente in (a, b) e (c, d) a due funzioni assolutamente continue $\eta_{1,0}(x)$ e $\eta_{2,0}(z)$.

Si può anche dimostrare come in [12; lemma I] che $\eta_{1,0}(x)$ e $\eta_{2,0}(z)$ hanno derivate a quadrato sommabile e che è

$$(18) \qquad \int_a^b |\eta'_{1,0}(x)|^2 dx \leq 1 \quad \int_c^d |\eta'_{2,0}(z)|^2 dz \leq 1 .$$

È ovvio poi che, poichè C_q e $\bar{C}$ hanno gli stessi estremi, risulta anche

$$(19) \qquad \eta_{1,0}(a) = \eta_{1,0}(b) = \eta_{2,0}(c) = \eta_{2,0}(d) = 0 .$$

Dunque la coppia $(\eta_{1,0}(x), \eta_{2,0}(z))$ costituisce una variazione prima smorzata.

5. - Due casi sono ora possibili:

I) $\eta_{1,0}(x)$ e $\eta_{2,0}(z)$ non sono ambedue identicamente nulle in (a, b) e (c, d) rispettivamente.

II) $\eta_{1,0}(x) \equiv 0$ in (a, b), $\eta_{2,0}(z) \equiv 0$ in (c, d).

Esaminiamo dapprima il I caso. La condizione d) ci assicura allora che è

$$(20) \qquad I_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2; \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) > 0 .$$

D'altra parte si ha per le (11)

$$(21) \qquad 0 \geq I(y_{1,q}, y_{2,q}) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) .$$

Si svolga allora $I(y_{1,q}, y_{2,q}) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2)$ secondo la (12) e si applichi lo sviluppo del TAYLOR agli integrandi del secondo e terzo integrale del secondo membro: si avrà

$$(22) \qquad 0 \geq I(y_{1,q}, y_{2,q}) - I(\bar{y}_1, \bar{y}_2) =$$

$$= \int_c^h \int^l \Big\{ \Big[\mathcal{E}_1 (y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y'_{2,q}; y'_{1,q}) +$$

$$+ \mathcal{E}_2 (y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2; y'_{2,q}) \Big] +$$

$$+ (y_{1,q} - \bar{y}_1) \bar{f}_{y_1} + (y_{2,q} - \bar{y}_2) \bar{f}_{y_2} +$$

$$+ \frac{1}{2} \Big[(y_{1,q} - \bar{y}_1)^2 f_{y_1 y_1} (\tilde{y}_{1,q}, \tilde{y}_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) +$$

$$+ 2 (y_{1,q} - \bar{y}_1)(y_{2,q} - \bar{y}_2) f_{y_1 y_2} (\tilde{y}_{1,q}, \tilde{y}_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) +$$

$$+ (y_{2,q} - \bar{y}_2)^2 f_{y_2 y_2} (\tilde{y}_{1,q}, \tilde{y}_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) \Big] +$$

$$+ \Big[(y'_{1,q} - \bar{y}'_1) f_{y'_1} (y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) +$$

$$+ (y'_{1,q} - \bar{y}'_1)(y'_{2,q} - \bar{y}'_2) f_{y'_1 y'_2} (y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \tilde{y}'_{2,q}) \Big] +$$

$$+ (y'_{2,q} - \bar{y}'_2) f_{y'_2} (y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_2) \Big\} dx\, dz$$

intendendo, per brevità, di tralasciare di indicare le variabili x e z e di indicare con $\bar{f}_{y_1}, \ldots$ le funzioni $f_{y_1}, \ldots$ calcolate per $(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{y}'_2(z))$; $\tilde{y}_{1,q}, \tilde{y}_{2,q}, \tilde{y}'_{2,q}$ sono ovviamente valori opportuni compresi rispettivamente tra $\bar{y}_1$ e $y_{1,q}$, $\bar{y}_2$ e $y_{2,q}$, $\bar{y}'_2$ e $y'_{2,q}$.

Sempre per la formula del TAYLOR si ha pure:

$$
(23)\quad \left\{
\begin{aligned}
&(y'_{1,q}-\bar y'_1)\, f_{y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) = (y'_{1,q}-\bar y'_1)\bar f_{y'_1} + \\
&+ (y'_{1,q}-\bar y'_1)(y_{1,q}-\bar y_1)\, f_{y'_1 y_1}(\overset{**}{y}_{1,q}, \overset{**}{y}_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) + \\
&+ (y'_{1,q}-\bar y'_1)(y_{2,q}-\bar y_2)\, f_{y'_1 y_2}(\overset{**}{y}_{1,q}, \overset{**}{y}_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) \\
&(y'_{2,q}-\bar y'_2)\, f_{y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) = (y'_{2,q}-\bar y'_2)\bar f_{y'_2} + \\
&+ (y'_{2,q}-\bar y'_2)(y_{1,q}-\bar y_1)\, f_{y'_2 y_1}(y^*_{1,q}, y^*_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) + \\
&+ (y'_{2,q}-\bar y'_2)(y_{2,q}-\bar y_2)\, f_{y'_2 y_2}(y^*_{1,q}, y^*_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2)
\end{aligned}
\right.
$$

con $\overset{**}{y}_{1,q}$, $y^*_{1,q}$ e $\overset{**}{y}_{2,q}$, $y^*_{2,q}$ compresi rispettivamente tra $\bar y_1$ e $y_{1,q}$ e tra $\bar y_2$ e $y_{2,q}$.

Ed è pure per la formula del TAYLOR:

$$
(24)\quad \left\{
\begin{aligned}
&\mathcal{E}_1(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y'_{2,q}; y'_{1,q}) = \\
&= \frac{1}{2}(y'_{1,q}-\bar y'_1)^2 f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) \\
&\mathcal{E}_2(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2; y'_{2,q}) = \\
&= \frac{1}{2}(y'_{2,q}-\bar y'_2)^2 f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*\prime}_{2,q})
\end{aligned}
\right.
$$

con $y^{*\prime}_{1,q}$ e $y^{*\prime}_{2,q}$ compresi rispettivamente tra $\bar y'_1$ e $y'_{1,q}$ e tra $\bar y'_2$ e $y'_{2,q}$.

Si introducano le (23) e le (24) in (22): ricordando anche le (16), si ha

$$(25)\quad 0 \geq K_q \int_a^b\!\!\int_c^d (\eta_{1,q}\bar f_{y_1} + \eta_{2,q}\bar f_{y_2} + \eta'_{1,q}\bar f_{y'_1} + \eta'_{2,q}\bar f_{y'_2})\, dx\, dz +$$

$$+ \frac{K_q^2}{2}\int_a^b\!\!\int_c^d \Big\{ \eta_{1,q}^2 f_{y_1 y_1}(\bar{\bar y}_{1,q}, \bar{\bar y}_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) +$$

$$+ 2\eta_{1,q}\eta_{2,q} f_{y_1 y_2}(\bar{\bar y}_{1,q}, \bar{\bar y}_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) +$$

$$+ \eta_{2,q}^2 f_{y_2 y_2}(\bar{\bar y}_{1,q}, \bar{\bar y}_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) + \eta'^2_{1,q} f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) +$$

$$+ \eta'^2_{2,q} f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*\prime}_{2,q}) + 2\eta'_{1,q}\eta_{1,q} f_{y'_1 y_1}(\overset{\circ\circ}{\bar y}_{1,q}, \overset{\circ\circ}{\bar y}_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) +$$

$$+ 2\eta'_{1,q}\eta_{2,q} f_{y'_1 y_2}(\overset{\circ\circ}{\bar y}_{1,q}, \overset{\circ\circ}{\bar y}_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) + 2\eta'_{2,q}\eta_{1,q} f_{y'_2 y_1}(y^*_{1,q}, y^*_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) +$$

$$+ 2\eta'_{2,q}\eta_{2,q} f_{y'_2 y_2}(y^*_{1,q}, y^*_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_2) +$$

$$+ 2\eta'_{1,q}\eta'_{2,q} f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \bar{\bar y}'_{2,q}) \Big\}\, dx\, dz\,.$$

Il primo integrale di (25) è nullo essendo la variazione prima di $I(y_1, y_2)$ lungo $\bar C$ (si veda [9; pag. 82]); dividendo allora per $\frac{K_q^2}{2}$ si ottiene la

$$0 \geq \int_a^b\!\!\int_c^d \Big\{ \ldots \Big\}\, dx\, dz$$

la funzione sotto il segno di integrale essendo quella del secondo integrale di (25); si osservi ora che se nel I, II, III, VI, VII, VIII, IX addendo di questa funzione sostituiamo le derivate parziali $f_{y'_1 y_1} \ldots$ con le stesse derivate calcolate però tutte nei punti $(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y'_1, \bar y'_2)$, si cambia complessivamente l'integrale di una quantità $0\,(q)$ che tende a zero per $q \to \infty$; e ciò, adoperando la disuguaglianza di Schwarz, per le (10′) e inoltre poichè risulta, per le (17),

2 7 *

$$(26) \qquad \int_a^b |\eta'_{1,q}|^2 dx \leq 1 \qquad \int_c^d |\eta'_{2,q}|^2 dx \leq 1 .$$

Sicchè allora si potrà scrivere:

$$(27) \qquad 0 \geq \int_a^b \int_c^d \Big\{ \eta^2_{1,q} \bar{f}_{y_1 y_1} + 2 \eta_{1,q} \eta_{2,q} \bar{f}_{y_1 y_2} + \eta^2_{2,q} \bar{f}_{y_2 y_2} +$$

$$+ \eta'^2_{1,q} f_{y'_1 y'_1} (y_{2,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) + \eta'^2_{2,q} f_{y'_2 y'_2} (y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y^{*\prime}_{2,q}) +$$

$$+ 2 \eta'_{1,q} \eta_{1,q} \bar{f}_{y'_1 y_1} + 2 \eta'_{1,q} \eta_{2,q} \bar{f}_{y'_1 y_2} + 2 \eta'_{2,q} \eta_{1,q} \bar{f}_{y'_1 y_1} +$$

$$+ 2 \eta'_{2,q} \eta_{2,q} \bar{f}_{y'_2 y_2} +$$

$$+ 2 \eta'_{1,q} \eta'_{2,q} f_{y'_1 y'_2} (y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_{2,q}) \Big\} dx\, dz + 0 (q) .$$

Ora, in virtù del *lemma* IV e del noto teorema di SEVERINI-EGOROFF, in corrispondenza di ogni $\delta > 0$ noi possiamo decomporre (a, b) e (c, d) rispettivamente in due insiemi M_1 e D_1 ed M_2 e D_2 tali che le misure di D_1 e D_2 siano minori di δ e che risulti

$$(28) \qquad \begin{cases} \lim\limits_{q \to \infty} y'_{1,q}(x) = \bar{y}'_1(x) & \text{uniformemente in } M_1 \\ \lim\limits_{q \to \infty} y'_{2,q}(z) = \bar{y}'_2(z) & \text{» » } M_2 \end{cases}$$

Diciamo M il prodotto topologico $M_1 \, x \, M_2$ e sia CM il complementare di M rispetto al rettangolo $R\,(a \leq x \leq b,\ c \leq z \leq d)$.

Si potrà allora scrivere:

$$(29) \qquad 0 \geq \int_a^d \int_c^b \Big\{ \eta^2_{1,q} \bar{f}_{y_1 y_1} + 2 \eta_{1,q} \eta_{2,q} \bar{f}_{y_1 y_2} + \eta^2_{2,q} \bar{f}_{y_2 y_2} +$$

$$+ 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_1 y_1} + 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_1 y_2} + 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_2 y_1} +$$

$$+ 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_2 y_2}\Big\}\,dx\,dz + \int\!\!\int_{\mathfrak{A}}\Big\{\eta'^{2}_{1,q}\,f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) +$$

$$+ \eta'^{2}_{1,q}\,f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*\prime}_{2,q}) +$$

$$+ 2\,\eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q}\,f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \tilde y'_{2,q})\Big\}\,dx\,dz +$$

$$+ \int\!\!\int_{C\mathfrak{A}}\Big\{\eta'^{2}_{1,q}\,f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}\, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) +$$

$$+ \eta'^{2}_{2,q}\,f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*\prime}_{2,q}) +$$

$$+ 2\,\eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q}\,f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \tilde y'_{2,q})\Big\}\,dx\,dz + 0\,(q).$$

In virtù delle (26) e delle (28), possiamo sostituire nel II integrale di (29) alle funzioni $f_{y'_1 y'_1}$, $f_{y'_1 y'_2}$, $f_{y'_2 y'_2}$ le stesse funzioni calcolate per $(x, z, \bar y_1, \bar y_2, \bar y'_1, \bar y'_2)$, alterando così l'integrale di una quantità $0'(q)$ che tende a zero per $q \to \infty$; potremo poi trascurare, nel III integrale di (29), i termini $\eta'^{2}_{1,q} f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{1,q})$ e $\eta'^{2}_{2,q} f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*\prime}_{2,q})$ che per le (24) e per il *lemma* I sono non negativi.

Si avrà così

$$(30)\quad 0 \geq \int_a^d\!\!\int_c \Big\{\eta^{2}_{1,q}\,\bar f_{y_1 y_1} + 2\,\eta_{1,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y_1 y_2} + \eta^{2}_{2,q}\,\bar f_{y_2 y_2} +$$

$$+ 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_1 y_1} + 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_1 y_2} + 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_2 y_1} +$$

$$+ 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_2 y_2}\Big\} dx\,dz + \iint_M \Big\{ \eta'^2_{1,q}\,\bar f_{y'_1 y'_1} + \eta'^2_{2,q}\,\bar f_{y'_2 y'_2} +$$

$$+ 2\,\eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q}\,\bar f_{y'_1 y'_2}\Big\} dx\,dz +$$

$$+ \iint_{CM} 2\,\eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q}\,f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \bar{\bar y}'_{2,q})\,dx\,dz + 0(q) + 0'(q) =$$

$$= \int_a^b\!\!\int_c^d \Big\{ \eta^2_{1,q}\,\bar f_{y_1 y_1} + 2\,\eta_{1,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y_1 y_2} + \eta^2_{2,q}\,\bar f_{y_2 y_2} +$$

$$+ 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_1 y_1} + 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_1 y_2} + 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_2 y_1} +$$

$$+ 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_2 y_2} + 2\,\eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q}\,\bar f_{y'_1 y'_2}\Big\} dx\,dz + \int_a^b\!\!\int_c^d \Big\{ \eta'^2_{1,q}\,\bar f_{y'_1 y'_1} +$$

$$+ \eta'^2_{2,q}\,\bar f_{y'_2 y'_2}\Big\} dx\,dz + 2\iint_{CM} \eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q}\,\Big\{ f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \bar{\bar y}'_2) -$$

$$- \bar f_{y'_1 y'_2}\Big\} dx\,dz - \iint_{CM} \Big\{ \eta'^2_{1,q}\,\bar f_{y'_1 y'_1} + \eta'^2_{2,q}\,\bar f_{y'_2 y'_2}\Big\} dx\,dz + 0(q) + 0'(q).$$

Il I integrale del terzo membro di (30) tende a [6]

$$\int_a^b\!\!\int_c^d \Big\{ \eta^2_{1,0}\,\bar f_{y_1 y_1} + 2\,\eta_{1,0}\,\eta_{2,0}\,\bar f_{y_1 y_2} + \tag{31}$$

[6] Il risultato è sostanzialmente già noto: si vedano [16; nn. 3 e 8] e [12; lemma 2, n. 6 e lemma 3, n. 7]. Anche nel nostro caso basta ripetere, adattandoli in modo ovvio, i ragionamenti dei lavori citati, tenendo presente che valgono le (18) e (26).

$$+\eta_{2,0}^{2} f_{y_2 y_2} + 2\,\eta'_{1,0}\,\eta_{1,0}\,\bar{f}_{y'_1 y_1} + 2\,\eta'_{1,0}\,\eta_{2,0}\,\bar{f}_{y'_1 y_2} +$$

$$+ 2\,\eta'_{2,0}\,\eta_{1,0}\,\bar{f}_{y'_2 y_1} + 2\,\eta'_{2,0}\,\eta_{2,0}\,\bar{f}_{y'_2 y_2} + 2\,\eta'_{2,0}\,\eta'_{2,0}\,\bar{f}_{y'_1 y'_2}\Big\}\,dx\,dz\,.$$

Il II integrale ha per minimo limite (7)

$$\int_a^b\int_c^d\Big\{\eta'^{2}_{1,0}\,\bar{f}_{y'_1 y'_1} + \eta'^{2}_{2,0}\,\bar{f}_{y'_2 y'_2}\Big\}\,dx\,dz\,.$$

Il III integrale essendo la misura di CM minore di $\delta\,[(b-a)+(d-c)+\delta]$ e poichè valgono le (26), è, per la disuguaglianza di Schwarz, minore in modulo, non appena q sia sufficientemente grande, di

$$2\,\sqrt{4\,M^2\,\delta\,[(b-a)+d-c)+\delta]} = \Psi(\delta)$$

dove M è il più grande dei massimi moduli di $f_{y'_1 y'_1}, f_{y'_1 y'_2}, f_{y'_2 y'_2}$ nel campo $a \leq x \leq b$, $c \leq z \leq d$, $|y_1 - \bar{y}_1(x)| \leq 1$, $|y_2 - \bar{y}_2(z)| \leq 1$, $|y'_1 - \bar{y}'_1(x)| \leq N$, $|y'_2 - \bar{y}'_2(z)| \leq N$; mentre il IV integrale è in modulo minore di

$$2\,M\,\delta\,[(b-a)+(d-c)+\delta] = \varphi(\delta)\,.$$

Sicchè allora facendo tendere q all'∞ si ha dalla (30)

$$0 \geq I_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2; \eta_{1,0}, \eta_{2,0}) - \Psi(\delta) - \varphi(\delta)\,;$$

(7) Anche questo risultato è contenuto in un lemma di Mc Shane [12; lemma 3, n. 7]; basta scrivere l'integrale nel seguente modo

$$\int_a^b \eta'^{2}_{1,q}(x)\,dx \int_c^d \bar{f}_{y'_1 y'_1}\,dz + \int_c^d \eta'^{2}_{2,q}(z)\,dz \int_a^b \bar{f}_{y'_2 y'_2}\,dz$$

e applicare il lemma suddetto ai due addendi.

e, essendo δ arbitrario e $\lim\limits_{\delta \to 0} \Psi(\delta) = \lim\limits_{\delta \to 0} \varphi(\delta) = 0$, si ha

$$0 \geqq I_2(\bar{y}_1, \bar{y}_2; \eta_{1,0}, \eta_{2,0})$$

in contraddizione con la (20).

6. - Veniamo ora al caso II. Con le stesse notazioni del numero precedente si ripetano gli stessi ragionamenti fino ad arrivare alla (29), la quale però si scriva ora nel seguente modo

$$(29') \qquad 0 \geqq \int_a^b \int_c^d \Big\{ \eta_{1,q}^2 \bar{f}_{y_1 y_1} + 2\eta_{1,q}\eta_{2,q} \bar{f}_{y_1 y_2} +$$

$$+ \eta_{2,q}^2 \bar{f}_{y_2 y_2} + 2\eta'_{1,q}\eta_{1,q} \bar{f}_{y'_1 y_1} + 2\eta'_{1,q}\eta_{2,q} \bar{f}_{y'_1 y_2} +$$

$$+ 2\eta'_{2,q}\eta_{1,q} \bar{f}_{y'_2 y_1} + 2\eta'_{2,q}\eta_{2,q} \bar{f}_{y'_2 y_2} \Big\} dx\,dz +$$

$$+ \int_a^b \int_c^d \Big\{ \eta_{1,q}'^2 f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) +$$

$$+ \eta_{2,q}'^2 f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, y^{*\prime}_{2,q}) \Big\} dx\,dz +$$

$$+ \iint_M 2\eta'_{1,q}\eta'_{2,q} f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}_{2,q}') \,dx\,dz +$$

$$+ \iint_{CM} 2\eta'_{1,q}\eta'_{2,q} f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar{y}'_1, \bar{y}'_{1,q}) \,dx\,dz + 0(q).$$

Si ragioni poi sul terzo integrale di (29′) come si è fatto sul secondo di (29); si avrà

$$(32)\quad 0 \geq \int_a^b\int_c^d \Big\{ \eta_{1,q}^2 \bar f_{y_1 y_1} + 2\,\eta_{1,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y_1 y_2} + \eta_{2,q}^2\,\bar f_{y_2 y_2} +$$

$$+ 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_1 y_1} + 2\,\eta'_{1,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_1 y_2} + 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{1,q}\,\bar f_{y'_2 y_1} +$$

$$+ 2\,\eta'_{2,q}\,\eta_{2,q}\,\bar f_{y'_2 y_2} + 2\,\eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q}\,\bar f_{y'_1 y'_2} \Big\}\, dx\, dz +$$

$$+ \int_a^b\int_c^d \Big\{ \eta'^2_{1,q}\, f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) +$$

$$+ \eta'^2_{2,q}\, f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*}_{2,q}) \Big\}\, dx\, dz +$$

$$+ 2 \int\!\!\int_{C_M} \eta'_{1,q}\,\eta'_{2,q} \Big\{ f_{y'_1 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, \bar y'_{2,q}) - \bar f_{y'_1 y'_2} \Big\}\, dx\, dz\,.$$

Per $q \to \infty$ il primo integrale di (32) tende, come si è visto nel numero precedente, all' integrale (31), che è in questo caso nullo; sicchè si avrà

$$(33)\quad 0 \geq \min_{q\to\infty} \lim \int_a^b\int_c^d \Big\{ \eta'^2_{1,q}\, f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) +$$

$$+ \eta'^2_{1,q}\, f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*\prime}_{2,q}) \Big\}\, dx\, dz - \Psi(\delta)\,.$$

D' altra parte, per le (16) e le (24) e per il *lemma* I, si ha

$$\eta'^2_{1,q}\, f_{y'_1 y'_1}(y_{1,q}, y_{2,q}, y^{*\prime}_{1,q}, y'_{2,q}) \geq 2\,\varepsilon\, \eta'^2_{1,q}\,,$$

$$\eta'^2_{2,q}\, f_{y'_2 y'_2}(y_{1,q}, y_{2,q}, \bar y'_1, y^{*\prime}_{2,q}) \geq 2\,\varepsilon\, \eta'^2_{2,q}\,.$$

Sicchè dalla (33) si ha, ricordando anche che δ è arbitrario e $\lim_{\delta \to 0} \Psi(\delta) = 0$,

$$0 \geq 2\varepsilon \min_{q\to\infty} \lim \int_a^b \int_c^d (\eta'^2_{1,q} + \eta'^2_{2,q})\, dx\, dz = \tag{34}$$

$$= 2\varepsilon \min_{q\to\infty} \lim \left[(d-c) \int_a^b \eta'^2_{1,q}\, dx + (b-a) \int_c^d \eta'^2_{2,q}\, dz \right].$$

Ora dalla (17), poichè $\lim_{q\to\infty} \eta_{1,q}(x) = \eta_{1,0}(x) \equiv 0$ e $\lim_{q\to\infty} \eta_{2,q}(z) = \eta_{2,0}(z) \equiv 0$, risulta senz'altro che

$$\min_{q\to\infty} \lim \left[(d-c) \int_a^b \eta'^2_{1,q}\, dx + (b-a) \int_c^d \eta'^2_{2,q}\, dz \right] > 0\,;$$

e allora poichè ε è pure positivo la (34) è assurda; e il teorema è così dimostrato in ogni caso.

Osservazione: È ovvio che, poichè nella dimostrazione del teorema si possono scambiare i ruoli di $y_{1,q}(x)$ e di $y_{2,q}(z)$, il teorema stesso vale ancora se alle condizioni b) e c) si sostituiscono le simmetriche

b') sia $\quad f_{y'_1 y'_1}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{y}'_2(z)) > 0$

per $\quad a \leq x \leq b,\ c \leq z \leq d$

$\quad f_{y'_2 y'_2}(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), y'_1, \bar{y}'_2(z)) > 0$

per $\quad a \leq x \leq b,\ c \leq z \leq d,\ |y'_1 - \bar{y}'_1(x)| \leq N$;

c') sia $\quad \mathcal{E}_1(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), \bar{y}'_1(x), \bar{y}'_2(z); y'_1) > 0$

per $\quad a \leq x \leq b,\ c \leq z \leq d,\ 0 < |y'_1 - \bar{y}'_1(x)| \leq N$;

$\quad \mathcal{E}_2(x, z, \bar{y}_1(x), \bar{y}_2(z), y'_1, \bar{y}'_2(z); y'_2) > 0$

per $\quad a \leq x \leq b,\ c \leq z \leq d,\ |y'_1 - \bar{y}'_1(x)| \leq N,$

$\quad 0 < |y'_2 - \bar{y}'_2(z)| \leq N.$

BIBLIOGRAFIA

1. – G. A. Bliss: *Lectures on the Calculus of Variations.* [Chicago 1946].

2. – S Faedo: *Condizioni necessarie per la semicontinuità di un nuovo tipo di funzionali.* [Ann. di Mat. pura e appl. (4), XXIII (1944) pp. 69-121].

3. – S. Faedo: *Un nuovo tipo di funzionali continui.* [Rend. di Mat. e delle sue appl., Roma (5), IV, fasc. III–IV (1943)].

4. – S. Faedo: *Sulle condizioni di Legendre e di Weierstrass per gli integrali di Fubini – Tonelli.* [Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa (2), XV (1946) pp. 127–135].

5. – H. H. Goldstine: *Conditions for a minimum of a functional.* [Contributions to the Calculus of Variations 1933–37, Chicago pp. 316–357].

6. – M. R. Hestenes: *An indirect sufficient proof for the problem of Bolza in the non-parametric form.* [Trans. Amer. Math. Soc., 62 (1947) pp. 509 535].

7. – E. E Levi: *Sui criteri sufficienti per il massimo e per il minimo nel Calcolo delle Variazioni.* [Ann. di Mat. pura e appl. (3), XXI (1913) pp. 173–218].

8. – E. Magenes: *Intorno agli integrali di Fubini – Tonelli: I Condizioni sufficienti per la semicontinuità.* [Ann. Scuola Norm. Sup. di Pisa (3) II (1948) pp. 1–38].

9. – E. Magenes: *Sulle equazioni di Eulero relative ai problemi di Calcolo delle Variazioni degli integrali di Fubini – Tonelli.* [Rend. Sem. Mat. Padova, XIX (1950) pp. 62 102].

10. – E. Magenes: *Un' osservazione sulle condizioni necessarie per la semicontinuità degli integrali di Fubini – Tonelli.* [Rend. Sem. Mat. Padova, XIX (1950) pp. 44-53].

11. – E. Magenes: *Sul minimo relativo degli integrali di Fubini – Tonelli.* [Giornale di Mat. di Battaglini (IV) 79, (1949–50) pp. 144–168].

12. – E. J. Mc Shane: *Sufficient conditions for a weak relative minimum in the problem of Bolza.* [Trans. Amer. Math. Soc., 52 (1942) pp. 344–379].

13. – F. G. Myers: *Sufficiency Theorems for the problem of Lagrange*. [Duke Math. Jornal, X (1943) pp. 73–97].

14. – W. T. Reid: *Sufficient conditions by expansion methods for the problem of Bolza in the Calculus of Variations*. [Annals of Math., 38 (1937) pp. 662–678].

15. - L. Tonelli: *Fondamenti di Calcolo delle Variazioni*. [Vol. I e II, Bologna – 1921–23].

16. – L. Tonelli: *Su alcuni funzionali*. [Ann. di Mat. pura e appl., (4) XVIII (1939) pp. 1–21].