

# RENDICONTI *del* SEMINARIO MATEMATICO *della* UNIVERSITÀ DI PADOVA

DEMORE QUILGHINI

## **Un esempio di controllo delle soluzioni dell'equazione del calore**

*Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova,*  
tome 36, n° 1 (1966), p. 1-24

[http://www.numdam.org/item?id=RSMUP\\_1966\\_\\_36\\_1\\_1\\_0](http://www.numdam.org/item?id=RSMUP_1966__36_1_1_0)

© Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova, 1966, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Rendiconti del Seminario Matematico della Università di Padova » (<http://rendiconti.math.unipd.it/>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

*Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques*

<http://www.numdam.org/>

# UN ESEMPIO DI CONTROLLO DELLE SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE DEL CALORE

*di* DEMORE QUILGHINI (*a Firenze*) \*)

## § 1. Introduzione.

Come è noto la teoria dei controlli è uno dei campi moderni della matematica applicata tra i più fecondi di realizzazioni tecniche ed è molto sviluppata, in particolare, nella parte relativa al controllo delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie. Non sono invece altrettanto progrediti gli studi teorici relativi al controllo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali nonostante la grande importanza che tali ricerche hanno per le applicazioni. Si pensi, ad esempio, ai problemi di controllo del calore che si presentano, sul piano pratico, nella Fisica-Tecnica e che vengono generalmente risolti controllando la quantità media di calore del sistema come se la temperatura non variasse da punto a punto, riducendo quindi tali problemi a quelli ordinari di controllo delle soluzioni di particolari equazioni differenziali ordinarie.

Allo scopo di contribuire ad una formulazione significativa, dal punto di vista fisico-matematico, dei problemi di controllo delle soluzioni delle equazioni alle derivate parziali che interes-

---

\*) Lavoro eseguito nell'ambito dei Gruppi di ricerca del Comitato Nazionale per la matematica del C.N.R.

Indirizzo dell'A.: Istituto Matematico, Università, Firenze.

sano la Fisica-Matematica, daremo in questo lavoro un esempio di controllo della temperatura in un mezzo  $M$  materiale omogeneo, termicamente isotropo, che occupa tutto lo spazio ed a caratteristiche termiche costanti, che assumiamo unitarie, disponendo delle unità di misura.

Precisamente, riferito  $M$  ad un sistema di ascisse  $x$ ,  $-\infty < x < \infty$ , tratteremo un caso unidimensionale, studiando il seguente problema:

*Assegnate le funzioni  $g(x)$  ed  $f(x)$ ,  $x \in (-\infty, \infty)$ , distribuire in  $M$  delle sorgenti di calore, di rendimento finito, in guisa che il sistema  $M$  evolva, in un prefissato intervallo di tempo  $T > 0$ , dallo stato termico  $g(x)$  ad uno stato termico prossimo, in modo prefissato, ad  $f(x)$ .*

Risolveremo questo problema nel § 2 dopo che avremo posto in questo paragrafo le premesse necessarie per giungere alla sua formulazione analitica. Nel § 3 faremo poi un esame critico dei risultati conseguiti e tratteremo un problema di ottimizzazione del controllo, che non ha riscontro nella teoria dei controlli delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, e che sembra di un certo interesse per le applicazioni: indicheremo infatti come risolvere il problema proposto usando il minor numero possibile di sorgenti. Nel § 4 infine daremo la dimostrazione dei teoremi necessari alla risoluzione del problema, che, per comodità di esposizione, sono soltanto enunciati nei §§ 1 e 2.

Precisiamo adesso i termini del problema.

Sia  $L^2$  lo spazio delle funzioni misurabili (secondo Lebesgue) ed a quadrato sommabile in  $(-\infty, \infty)$  e indichiamo con

$$\|\varphi(x)\| = \left[ \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi(x)\}^2 dx \right]^{1/2}$$

la norma di una funzione  $\varphi(x) \in L^2$ . Supponiamo adesso che ad un certo istante, che assumeremo come istante iniziale  $t_0 = 0$ , il sistema  $M$  si trovi alla temperatura  $g(x) \in L^2$ , e indichiamo con:

$$(1.1) \quad S_N = S(q_1, q_2, \dots, q_N; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N) = \sum_{i=1}^{1\dots N} q_i(t) \delta(x - \xi_i),$$

dove  $\delta(x - \xi_i)$  è la « funzione » di Dirac di centro  $\xi_i$ , una distribuzione di  $N$  piani-sorgente di rendimento  $q_i(t)$  (quantità di calore emesso nell'unità di tempo), che supponiamo limitato per  $t \in (0, T]$ , e di ascissa  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ . Come è noto la temperatura  $U(x, t)$  determinata in  $M$  per  $t \in (0, T]$  dallo stato termico iniziale  $g(x) \in L^2$  e dalla distribuzione di piani-sorgente  $S_N$ , definita dalla (1.1), è la soluzione, unica nella classe delle funzioni definite per  $x \in (-\infty, \infty)$ ,  $t \in (0, T]$ , appartenenti ad  $L^2$  e di norma uniformemente limitata per  $t \in (0, T]$ , continue ovunque e con derivate continue per  $x \neq \xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , dell'equazione:

$$(1.2) \quad \frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + S_N, \quad t \in (0, T], \quad x \in (-\infty, \infty),$$

che soddisfa alla condizione:

$$(1.3) \quad \lim_{t \rightarrow 0} U(x, t) = g(x),$$

per quasi-ogni  $x \in (-\infty, \infty)$ , e precisamente per tutti i valori di  $x$  in cui  $g(x)$  è continua.

Alla funzione  $U(x, t)$  così definita può darsi la forma:

$$(1.4) \quad U(x, t) = u(x, t) + K_t[S_N],$$

dove

$$(1.6) \quad u(x, t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} g(\xi) \exp\left(-\frac{(x - \xi)^2}{4t}\right) d\xi,$$

è la temperatura determinata in  $M$  dallo stato termico iniziale  $g(x)$  (cfr. [1]<sup>1)</sup>, cap. II, § 2.2, pag. 53), mentre abbiamo posto, con ovvio significato dei simboli:

$$(1.7) \quad K_t[S_N] = K_t[S(q_1, q_2, \dots, q_N; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)] = \sum_i^{1\dots N} K_t[s(q_i; \xi_i)],$$

---

<sup>1)</sup> I numeri in neretto ed in parentesi quadra si riferiscono alla bibliografia posta al termine del lavoro.

essendo:

$$\begin{aligned}
 (1.8) \quad K_i[s(q_i; \xi_i)] &= \\
 &= \int_0^t \frac{q_i(\tau)}{2\sqrt{\pi(t-\tau)}} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\xi - \xi_i) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4(t-\tau)}\right) d\xi \right) d\tau = \\
 &= \int_0^t \frac{q_i(\tau)}{2\sqrt{(t-\tau)}} \exp\left(-\frac{(x-\xi_i)^2}{4(t-\tau)}\right) d\tau,
 \end{aligned}$$

la temperatura determinata in  $M$  dal piano-sorgente di rendimento  $q_i(t)$  e di ascissa  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , (cfr. [1], cap. X, § 10.4, pagg. 262-263).

Sussistono infatti i seguenti teoremi che giustificano (ricorrendo le proprietà delle  $U(x, t)$ ) la (14):

**TEOREMA 1:** Se è  $g(x) \in L^2$  è pure  $u(x, t) \in L^2$  ed è:

$$\|u(x, t)\| \leq \|g(x)\|$$

qualunque sia  $t$ .

**TEOREMA 2:** Se  $q_i(t)$  è uniformemente limitata per  $t \in (0, T]$  ed è ivi misurabile è  $K_i[s(q_i; \xi_i)] \in L^2$  e si ha:

$$\|K_i[s(q_i; \xi_i)]\|^2 \leq \frac{C^2 t^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}$$

essendo  $C$  una costante indipendente da  $t$ , ed inoltre si ha:

$$\lim_{t \rightarrow 0} K_i[s(q_i; \xi_i)] = 0$$

uniformemente rispetto ad  $x$ .

Siamo adesso in grado di precisare analiticamente i termini del problema proposto. Siano infatti  $g(x) \in L^2$ ,  $f(x) \in L^2$  e le  $q_i(t)$  siano limitate per  $t \in (0, T]$ . Diremo che il sistema  $M$  evolve in un prefissato intervallo di tempo  $T > 0$  dallo stato termico  $g(x)$  ad uno stato termico  $\varepsilon$ -prossimo ad  $f(x)$  se, fissato  $\varepsilon > 0$ , accade che:

$$\|f(x) - U(x, T)\| \leq \varepsilon.$$

In conseguenza di questa definizione il problema proposto può porsi nella seguente forma analitica:

**PROBLEMA A:** *Assegnate le funzioni  $g(x) \in L^2$  ed  $f(x) \in L^2$  e fissati un istante  $T > 0$  ed un numero  $\varepsilon > 0$  costruire una distribuzione di  $N$  piani-sorgente  $\sum_{i=1}^N q_i(t) \delta(x - \xi_i)$ , di rendimento  $q_i(t)$  uniformemente limitato per  $t \in (0, T]$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , in guisa che risulti:*

$$(A) \quad \| f(x) - U(x, T) \| \leq \varepsilon$$

Il problema è perciò quello di determinare il termine di controllo  $S_N$ , che compare nella equazione alle derivate parziali (1.2), nella classe delle distribuzioni di sorgenti costituite da un numero finito di piani-sorgente di rendimento limitato in guisa da soddisfare la (A). Posto adesso

$$F(x) = f(x) - u(x, T),$$

ricordando il teorema 1 e la (1.7), al problema A può darsi la seguente forma:

**PROBLEMA B:** *Assegnata una funzione  $F(x) \in L^2$  e fissati un istante  $T > 0$  ed un numero  $\varepsilon > 0$  costruire una distribuzione  $S_N$  di piani-sorgente di rendimento limitato in guisa che risulti:*

$$(B) \quad \| F(x) - K_N[S_N] \| \leq \varepsilon$$

Si ha da qui che il problema di fare evolvere il sistema  $M$  a partire dallo stato termico iniziale  $g(x)$  è equivalente, dal punto di vista analitico, all'analogo problema partendo dalla temperatura nulla.

Nel paragrafo che segue risolveremo il problema nella forma B ed useremo, per questo scopo, una distribuzione di sorgenti di rendimento costante. Premettiamo quindi l'espressione di  $K_i[s(q_i; \xi_i)]$ , e quindi anche di  $K_i[S_N]$ , (cfr. la (1.7) e la (1.8)), quando tutte le  $q_i$  sono costanti nel tempo.

Dalla (1.8) si ha, per  $q_i(t) = q_i = \text{cost}$ :

$$\begin{aligned} K_i[s(q_i; \xi_i)] &= q_i \int_0^t \frac{\exp\left(-\frac{(x - \xi_i)^2}{4(t - \tau)}\right)}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} d\tau = \\ &= q_i \sqrt{\frac{t}{\pi}} \exp\left(-\frac{(x - \xi_i)^2}{4t}\right) - q_i \frac{|x - \xi_i|}{2} \operatorname{erfc}\left(\frac{|x - \xi_i|}{2\sqrt{t}}\right), \end{aligned}$$

(cfr. [1], cap. X, § 10.4, n. IV, pagg. 262-263) e perciò anche:

$$(1.9) \quad K_i[s(q_i; \xi_i)] = q_i \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_i|}{2 \sqrt{t}} \right),$$

essendo:

$$(1.10) \quad \operatorname{erfc}(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_z^{\infty} \exp(-y^2) dy,$$

$$\operatorname{ierfc}(z) = \int_z^{\infty} \operatorname{erfc}(y) dy = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \exp(-z^2) - z \operatorname{erfc}(z),$$

(cfr. [1], App. II, f. le (3) e (11), pagg. 482-484).

Dalla (1.9), ricordando la (1.7), segue immediatamente, quando tutte le  $q_i(t)$  sono costanti:

$$(1.11) \quad K_i[S_N] = \sum_i^{1 \dots N} q_i \sqrt{t} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_i|}{2 \sqrt{t}} \right).$$

## § 2. Soluzione del problema B.

Passiamo adesso a risolvere il problema proposto, che tratteremo nella forma B.

Sia  $I$  un insieme numerabile di valori  $\xi_i$  ovunque denso in  $(-\infty, \infty)$ , tale cioè che comunque si prenda il numero reale  $\xi$  esso è di accumulazione di valori appartenenti ad  $I$ , in altre parole  $I$  sia un insieme numerabile di numeri tale che la sua chiusura è l'insieme di tutti i numeri reali. Indichiamo poi con  $\mathcal{J}$  la famiglia di tutti gli insiemi  $I$  che godono le proprietà sopra specificate. La famiglia  $\mathcal{J}$  non è vuota, ad esempio l'insieme di tutti i numeri razionali relativi appartiene ad essa. Preso adesso un insieme  $I \in \mathcal{J}$  ordiniamo i numeri nelle successione  $\{\xi_n\}$  e costruiamo la successione di funzioni:

$$(2.1) \quad \{f_n(x)\},$$

dove:

$$(2.2) \quad f_n(x) = \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_n|}{2\sqrt{T}} \right),$$

essendo  $T > 0$  il prefissato intervallo di tempo stabilito nel problema. Ricordando la (1.9) possiamo interpretare  $f_n(x)$  come la temperatura in  $M$  all'istante  $T$  dovuta al piano-sorgente di rendimento unitario e di ascissa  $\xi_n$ .

La successione (2.1) costituisce un sistema completo rispetto alle funzioni di  $L^2$ , sussiste infatti il seguente teorema fondamentale:

**TEOREMA 3:** *Se una funzione  $f(x) \in L^2$  è ortogonale in  $(-\infty, \infty)$  a tutte le funzioni della successione (2.1) essa è nulla quasi-ovunque.*

Per le funzioni della successione (2.1) sussiste anche il seguente teorema:

**TEOREMA 4:** *Se i valori  $\xi_n$  dell'insieme  $I$  sono tutti distinti, prese comunque  $N$  funzioni distinte della successione (2.1) esse sono linearmente indipendenti in  $(-\infty, \infty)$ .*

In forza del teorema 4 è allora possibile, partendo dalla successione (2.1), costruire una successione:

$$(2.3) \quad \{\varphi_n(x)\}$$

dove

$$(2.4) \quad \varphi_n(x) = c_{n,1}f_1(x) + c_{n,2}f_2(x) + \dots + c_{n,n}f_n(x),$$

con le  $c_{n,i}$  costanti,  $i = 1, 2, \dots, n$ , di funzioni normali in  $L^2$  e mutuamente ortogonali in  $(-\infty, \infty)$ , e cioè tali che:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi_n(x)\varphi_m(x)dx = 0, \quad n \neq m, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \{\varphi_n(x)\}^2 dx = 1, \quad n = 1, 2, \dots,$$

(cfr. [2], vol. II, cap. I, § 4, th. 10, pag. 11). Per le funzioni della successione (2.3) sussiste poi il seguente teorema:

**TEOREMA 5:** *Se una funzione  $f(x) \in L^2$  è ortogonale in  $(-\infty, \infty)$  a tutte le funzioni della successione (2.3) essa è nulla quasi-ovunque.*

Questo teorema è una immediata conseguenza della definizione delle  $\varphi_n(x)$  e del teorema 3, per una dimostrazione cfr. [3], cap. IX, § 76, th. VI, pag. 237. Da quanto precede si ha quindi:

*La successione (2.3) costituisce un sistema ortonormale chiuso rispetto alle funzioni di  $L^2$ .*

Siamo adesso in grado di risolvere il problema B. A questo scopo prendiamo un insieme  $I \in \mathcal{J}$  e, costruita la successione (2.1) relativa a tale insieme  $I$  ed all'istante  $T$  assegnato, costruiamo la successione (2.3) con la legge di ortonormalizzazione (2.4) (notiamo che tutte le  $c_{n,t}$  sono finite). Poichè, come abbiamo osservato, il sistema  $\{\varphi_n(x)\}$  è ortonormale chiuso rispetto alle funzioni di  $L^2$ , indicanti con:

$$(2.5) \quad a_n = \int_{-\infty}^{\infty} F(x)\varphi_n(x)dx, \quad n = 1, 2, \dots,$$

i coefficienti di Fourier, relativi al sistema  $\{\varphi_n(x)\}$ , della funzione  $F(x) \in L^2$  assegnata nel problema, la serie:

$$\sum_n^{1 \dots \infty} a_n \varphi_n(x)$$

converge in media del secondo ordine verso  $F(x)$  in  $(-\infty, \infty)$ , si ha cioè:

$$(2.6) \quad \left\| F(x) - \sum_n^{1 \dots \infty} a_n \varphi_n(x) \right\| = 0,$$

(cfr. [4], cap. X, § 492, pagg. 759-761; cfr. anche [5]).

Perciò, fissato  $\varepsilon > 0$ , si può determinare un indice  $N_0$  tale che qualunque sia  $N \geq N_0$  si ha:

$$(2.7) \quad \left\| F(x) - \sum_n^{1 \dots N} a_n \varphi_n(x) \right\| \leq \varepsilon.$$

D'altra parte, ricordando la (2.4) e la (2.2), si ha:

$$(2.8) \quad a_n \varphi_n(x) = \sum_t^{1 \dots n} a_n c_{n,t} \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_t|}{2\sqrt{T}} \right)$$

e perciò:

$$(2.9) \quad \sum_n^{1\dots N} a_n \varphi_n(x) = \sum_n^{1\dots N} \sum_i^{1\dots n} a_n c_{n,i} \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_i|}{2 \sqrt{T}} \right) = \\ = \sum_i^{1\dots N} q_i \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_i|}{2 \sqrt{T}} \right),$$

avendo posto

$$(2.10) \quad q_i = \sum_n^{i\dots N} a_n c_{n,i}.$$

Da qui, ricordando la (1.11), si ha:

$$(2.11) \quad K_T[S_N] = \sum_n^{1\dots N} a_n \varphi_n(x)$$

dove, con la posizione (2.10) e ricordando la (1.1):

$$(2.12) \quad S_N = S(q_1, q_2, \dots, q_N; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N).$$

Perciò, determinato un  $N$  per il quale vale la (2.7), dalla (2.11) si ha:

$$\| F(x) - K_T[S_N] \| \leq \varepsilon$$

e quindi, ricordando la (B) ed osservando che  $K_T[S_N] = \sum_n^{1\dots N} a_n \varphi_n(x)$  può essere interpretata, in forza della (1.11), come la temperatura in  $M$  all'istante  $T$  determinata dalla distribuzione di piani-sorgente, definita dalla (2.12), a partire dall'istante iniziale, il problema proposto è risolto mediante la distribuzione  $S_N$  definita dalla (2.12) e dalla (2.10). Osserviamo per inciso che le costanti  $a_n$ , definite dalla (2.5), così come le costanti  $c_{n,i}$ , che sono i coefficienti di ortonormalizzazione del sistema (2.1), sono numeri finiti e perciò sono pure finiti i coefficienti  $q_i$  definiti dalla (2.10) e che rappresentano il rendimento di ogni singolo piano-sorgente che compone la distribuzione  $S_N$ .

### § 3. Critica dei risultati ottenuti. Un esempio di ottimazione del controllo.

Conviene adesso esaminare criticamente i risultati ottenuti nel § 2.

Dalla (2.8), indicato con

$$(3.1) \quad D_n = D(a_n c_{n,1}, a_n c_{n,2}, \dots, a_n c_{n,n}; \xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n) = \\ = \sum_n^{1 \dots \infty} a_n c_{n,i} \delta(x - \xi_i)$$

la distribuzione costituita da  $n$  piani-sorgente di rendimento  $a_n c_{n,i}$  e di ascissa  $\xi_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ , otteniamo:

$$a_n \varphi_n(x) = K_T[D_n]$$

e in conseguenza la (2.6) assume la forma:

$$\| F(x) - \sum_n^{1 \dots \infty} K_T[D_n] \| = 0,$$

cioè la serie:

$$(3.2) \quad \sum_n^{1 \dots \infty} K_T[D_n],$$

dove  $D_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , è definita dalla (3.1), converge in media verso  $F(x)$ . Questo fatto può ingenerare l'idea che sia possibile risolvere il problema B anche per  $\varepsilon = 0$ , il che invece non è, in generale, vero, cioè mentre questo è possibile per alcune particolari funzioni  $F(x) \in L^2$ , ad esempio ciò è possibile se  $F(x)$  è una combinazione lineare di un numero finito di funzioni del tipo  $\sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_i|}{2\sqrt{T}} \right)$ , non è possibile per tutte le funzioni  $F(x)$  di  $L^2$ . Infatti, mentre la serie (3.2) converge in media verso  $F(x) \in L^2$ , non si può dire che la serie  $\sum_n^{1 \dots \infty} K_t[D_n]$ ,  $0 < t < T$ , converga verso una funzione di  $L^2$ , ciò significa che  $\sum_n^{1 \dots \infty} K_t[D_n]$  non rappresenta la temperatura in  $M$  all'istante  $t \in (0, T)$  dovuta a

tutte le distribuzioni  $D_n$ ,  $n = 1, 2, \dots$ , e perciò  $\sum_n^{1, \dots, \infty} K_r[D_n]$  non rappresenta, in generale, la temperatura di evoluzione di  $M$  dallo stato termico iniziale allo stato termico finale. Di più, mentre la serie:

$$(3.2) \quad \sum_n^{1, \dots, \infty} K_r[D_n] = \sum_n^{1, \dots, \infty} \left( \sum_i^{1, \dots, n} a_n c_{n,i} \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_i|}{2 \sqrt{T}} \right) \right)$$

converge in media verso  $F(x)$ , non è detto che altrettanto accada per la serie

$$(3.3) \quad \sum_i^{1, \dots, \infty} \left( \sum_n^{i, \dots, \infty} a_n c_{n,i} \right) \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi_i|}{2 \sqrt{T}} \right),$$

ottenuta associando, piano-sorgente per piano-sorgente, gli addendi dei termini  $K_r[D_n]$  della serie (3.2), anche ammesso che la serie (3.3) abbia significato. Del resto che il problema B non sia, in generale, ben posto per  $\epsilon = 0$  è nella natura stessa delle equazioni di tipo parabolico le quali reggono fenomeni irreversibili, e se il problema B fosse risolvibile per  $\epsilon = 0$ , e ciò per qualunque funzione  $F(x) \in L^2$ , sarebbe possibile, ripensando al problema A, raggiungere un qualunque stato termico  $f(x) \in L^2$  partendo da un qualunque stato termico iniziale  $g(x) \in L^2$ , il che equivale alla reversibilità, basta per questo fare  $f(x) = g(x)$ . Perciò il problema di controllo B è ben posto soltanto per  $\epsilon > 0$ .

Nel § 2 abbiamo costruito il termine di controllo  $S_N$  della equazione (1.2) in guisa da soddisfare la (B) e ciò con l'unica limitazione che sia  $N \geq N_0$ , essendo  $N_0$  il più piccolo intero per il quale è verificata la (2.7). Da qui segue subito che le soluzioni del problema sono infinite, esistono cioè infinite distribuzioni di piani-sorgente  $S_N$  che risolvono il problema. Si ottengono inoltre controlli diversi cambiando l'ordine dei numeri dell'insieme  $I \in \mathcal{J}$  preso per risolvere il problema, ed infine si possono ancora ottenere controlli diversi assumendo, al posto dell'insieme  $I$ , altri insiemi numerici della famiglia  $\mathcal{J}$ . Di più, ancorchè l'uso di sorgenti di rendimento costante sia molto diffuso nella pratica, si può pensare di usare, come vengono effettivamente usati, con-

trolli costituiti da sorgenti di rendimento variabile nel tempo. Ma anche limitandoci a considerare termini di controllo costituiti da sorgenti di rendimento costante segue, da quanto si è detto, che si hanno infinite possibilità nella costruzione dei termini di controllo. Ci si può allora servire della arbitrarietà, che ancora permane sul termine di controllo, per soddisfare ad altre condizioni, opportunamente fissate, giungendo così a formulare i problemi, cosiddetti, di controllo ottimale. Nel nostro caso si può considerare ad esempio la questione seguente, che non trova riscontro nei problemi di ottimizzazione del controllo per le soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie.

*Fra tutti i controlli costituiti da una distribuzione  $S_x$  di piani-sorgente di rendimento costante che risolvono il problema B determinare quello (o quelli) che sono costituiti dal minor numero di piani-sorgente.*

Questo problema, che è di un certo interesse per le applicazioni, è equivalente, come vedremo, al problema di determinare la combinazione lineare di ordine  $n$  del tipo  $\sum_i^{1\dots n} p_i \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \eta_i|}{2 \sqrt{T}} \right)$  che realizza la migliore approssimazione in media (del secondo ordine) di una assegnata funzione  $F(x) \in L^2$ . Per provarlo ragioniamo come segue.

Supponiamo di avere determinato una soluzione del problema B, supponiamo cioè di avere determinato, con il procedimento indicato nel § 2, un intero  $N$  ed un gruppo  $S_x$  di piani-sorgente di rendimento costante in guisa da soddisfare la (B). Ciò premesso si consideri, fissato l'intero  $n$ , la funzione:

$$(3.4) \quad \begin{aligned} & K_T[D(p_1, p_2, \dots, p_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)] = \\ & = \sum_i^{1\dots n} p_i \sqrt{T} \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \eta_i|}{2 \sqrt{T}} \right) = \sum_i^{1\dots n} p_i f(x, \eta_i) \end{aligned}$$

dove le  $p_i \in (-\infty, \infty)$  e le  $\eta_i \in (-\infty, \infty)$  sono da considerarsi come variabili indipendenti. Tale funzione può essere interpretata, una volta fissate le  $p_i$  e le  $\eta_i$ , come la temperatura determinata in  $M$  allo istante  $T$  dalla distribuzione degli  $n$  piani-sorgente di rendimento  $p_i$  e di ascissa  $\eta_i$ , e perciò con ovvio

significato dei simboli è stata indicata con  $K_x[D(p_1, p_2, \dots, p_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n)]$ . Domandiamoci adesso come devono prendersi le  $p_i$  e le  $\eta_i$  affinché il valore della funzione:

$$(3.5) \quad \Phi_n(p_1, p_2, \dots, p_n; \eta_1, \eta_2, \dots, \eta_n) = \Phi_n(p_i | \eta_i) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty} \{F(x) - \sum_i^{1..n} p_i f(x, \eta_i)\}^2 dx$$

risulti minimo. Supponiamo di avere risolto questo problema, che è quello di determinare la combinazione lineare  $\sum_i^{1..n} p_i f(x, \eta_i)$  di ordine  $n$  che fornisce la migliore approssimazione in media (del secondo ordine) di  $F(x)$  e siano:

$$q_i^{(n)}, \quad \xi_i^{(n)}, \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

due ennuple di valori tali che:

$$(3.6) \quad \Phi_n(q_i^{(n)} | \xi_i^{(n)}) \leq \Phi_n(p_i | \eta_i)$$

comunque si prendano le  $p_i \in (-\infty, \infty)$  e le  $\eta_i \in (-\infty, \infty)$ .

Manifestamente, risolto questo problema per tutti i valori di  $n$  da 1 ad  $N$  (ricordiamo che siamo partiti dall'ipotesi di avere già determinato una distribuzione  $S_N$  che risolve il problema B), è risolto anche il problema di ottimizzazione proposto. Infatti, o è già  $\|F(x)\| \leq \varepsilon$  e allora il problema di controllo non si pone neppure, o ciò non si verifica, ed allora con un numero finito di prove, essendo finito l'intero  $N$  della  $S_N$  che verifica la (B), si può determinare il più piccolo intero  $n$  per il quale si ha:

$$(3.7) \quad \Phi_n(q_i^{(n)} | \xi_i^{(n)}) \leq \varepsilon^2$$

risolvendo così (cfr. la (3.6), la (3.5) e la (3.4)) il problema di ottimizzazione proposto. Il nostro problema di ottimizzazione è perciò ridotto al problema di determinare la combinazione lineare di ordine  $n$  del tipo  $\sum_i^{1..n} p_i f(x, \eta_i)$  che realizza la migliore approssimazione in media di  $F(x)$  per  $n = 1, 2, \dots, N$ . Dimostriamo adesso

che fissato l'intero  $n$  esiste almeno una combinazione lineare  $\sum_{i=1}^n q_i^{(n)} f(x, \xi_i^{(n)})$  che verifica la (3.6) e che perciò realizza la migliore approssimazione in media di  $F(x)$ . Ciò è una immediata conseguenza della continuità di  $\Phi_n(p_i | \eta_i)$  e del fatto che tale funzione è inferiormente limitata (cfr. la (3.5)). Osservando infine che  $\frac{\partial \Phi_n}{\partial p_i}$  e  $\frac{\partial \Phi_n}{\partial \eta_i}$  sono funzioni continue, come si può verificare facilmente eseguendo i calcoli, segue subito che il minimo di  $\Phi_n(p_i | \eta_i)$  va ricercato tra le soluzioni  $\bar{p}_i, \bar{\eta}_i, i = 1, 2, \dots, n$ , del sistema di equazioni:

$$\frac{\partial \Phi_n(p_i | \eta_i)}{\partial p_i} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_n(p_i | \eta_i)}{\partial \eta_i} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Da quando è stato detto segue l'esistenza di almeno una soluzione del problema di ottimizzazione proposto e vogliamo osservare che essa non è, in generale, unica. Se infatti la (3.7) è verificata in senso forte, a causa della continuità di  $\Phi_n(p_i | \eta_i)$  esiste nel dominio delle  $p_i \in (-\infty, \infty)$  e delle  $\eta_i \in (-\infty, \infty)$  tutto un intorno del punto  $(q_i^{(n)}, \xi_i^{(n)})$  tale che quando il punto  $(p_i, \eta_i)$  appartiene ad esso intorno si ha ancora

$$\Phi_n(p_i | \eta_i) \leq \varepsilon^2.$$

In corrispondenza esistono perciò infinite soluzioni del problema di ottimizzazione.

Abbiamo qui studiato un esempio di ottimizzazione del controllo che è legato, in modo essenziale, alla variabile di spazio e che perciò non trova riscontro nei problemi di controllo delle soluzioni delle equazioni differenziali ordinarie, ma si possono dare molti altri esempi imponendo altre condizioni secondo le necessità che si possono presentare. Si può così, ad esempio, cercare di limitare il rendimento complessivo della distribuzione  $S_N$  (o il rendimento di ogni singolo piano-sorgente che compone  $S_N$ ) giungendo così a formulare il problema tipico della controllabilità approssimata delle soluzioni dell'equazione del calore.

§ 4. Dimostrazioni dei teoremi di cui ai §§ 1 e 2.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 1. Nelle nostre ipotesi le funzioni di  $\xi$ :

$$g(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8t}\right), \quad \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8t}\right)$$

appartengono ad  $L^2$   $\xi \in (-\infty, \infty)$  comunque si prendano  $x$  e  $t$ .

Si ha infatti

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ g(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8t}\right) \right\}^2 d\xi &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \{g(\xi)\}^2 d\xi, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8t}\right) \right\}^2 d\xi &= 2 \sqrt{t} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) d \frac{\xi}{2\sqrt{t}} = \\ &= 2 \sqrt{\pi t}. \end{aligned}$$

Perciò dalla limitazione di Bunikowsky-Schwarz (cfr. [2], vol. II, cap. I, § 2, pag. 5) otteniamo, ricordando la (1.6):

$$\begin{aligned} \{u(x, t)\}^2 &\leq \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ g(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8t}\right) \right\}^2 d\xi \cdot \\ &\cdot \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8t}\right) \right\}^2 d\xi = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ g(\xi) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{8t}\right) \right\}^2 d\xi, \end{aligned}$$

e quindi:

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \{u(x, t)\}^2 dx &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \{g(\xi)\}^2 \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4t}\right) d \frac{x}{2\sqrt{t}} \right) d\xi = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \{g(\xi)\}^2 d\xi, \end{aligned}$$

uniformemente rispetto a  $t$ , e da qui il teorema.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 2. Dalla (1.8) si ha infatti:

$$(4.1) \quad |K_t[s(q_i; \xi_i)]| \leq C \int_0^t \frac{\exp\left(-\frac{(x - \xi_i)^2}{4(t - \tau)}\right)}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} d\tau$$

essendo  $C$  una costante positiva tale che  $|q_i(t)| \leq C$  per  $t \in (0, T]$ .

Si ha perciò:

$$(4.2) \quad \{K_t[s(q_i; \xi_i)]\}^2 \leq C^2 \int_0^t \frac{\exp\left(-\frac{(x - \xi_i)^2}{2(t - \tau)}\right)}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} d\tau \cdot \int_0^t \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}},$$

in forza della limitazione di Bunikowsky-Schwarz tenuto conto che le funzioni di  $\tau$ :

$$\frac{\exp\left(-\frac{(x - \xi_i)^2}{4(t - \tau)}\right)}{\sqrt{2}\sqrt{\pi(t - \tau)}}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{\pi(t - \tau)}}$$

sono a quadrato sommabile, rispetto a  $\tau$ , nell'intervallo  $(0, t)$  comunque si prendano  $x$  e  $\xi_i$ . Dalla (4.2) si ha infine:

$$\begin{aligned} & \int_{-\infty}^{\infty} \{K_t[s(q_i; \xi_i)]\}^2 dx \leq \\ & \leq C^2 \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \exp\left(-\frac{(x - \xi_i)^2}{2(t - \tau)}\right) d\frac{x}{\sqrt{2(t - \tau)}} \right) d\tau \cdot \\ & \quad \cdot \int_0^t \frac{d\tau}{2\sqrt{\pi(t - \tau)}} = \frac{C^2 t^{3/2}}{\sqrt{2\pi}}, \end{aligned}$$

ed è perciò provata la prima parte del teorema. Dalla (4.1) si prova poi facilmente la seconda parte.

DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 3. Osserviamo preliminarmente che in forza del teorema 2 è  $f_n(x) \in L^2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Ciò premesso

sia  $f(x) \in L^2$  ortogonale in  $(-\infty, \infty)$  a tutte le funzioni della successione (2.1), si abbia cioè:

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) f_n(x) dx = 0, \quad n = 1, 2, \dots,$$

e consideriamo la funzione di  $\xi$ :

$$(4.3) \quad \varphi(\xi) = \sqrt{T} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{|x - \xi|}{2\sqrt{T}} \right) dx, \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Nelle nostre ipotesi, ricordando anche la (2.2),  $\varphi(\xi)$  si annulla per tutti i valori di  $\xi \in I$ . Quindi, poichè la chiusura di  $I$  coincide con l'insieme dei numeri reali e  $\varphi(\xi)$  è continua, segue che  $\varphi(\xi)$  è identicamente nulla per  $\xi \in (-\infty, \infty)$ . Avremo perciò:

$$\varphi'(\xi) = 0, \quad \varphi''(\xi) = 0, \quad \xi \in (-\infty, \infty).$$

Facilmente si prova che:

$$(4.4) \quad \begin{aligned} \varphi'(\xi) = & -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi} f(x) \operatorname{erfc} \left( \frac{\xi - x}{2\sqrt{T}} \right) dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\xi}^{\infty} f(x) \operatorname{erfc} \left( \frac{x - \xi}{2\sqrt{T}} \right) dx. \end{aligned}$$

Dalla (4.3) si ha infatti:

$$\begin{aligned} \varphi(\xi) = & \sqrt{T} \int_{-\infty}^{\xi} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{\xi - x}{2\sqrt{T}} \right) dx + \\ & + \sqrt{T} \int_{\xi}^{\infty} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{x - \xi}{2\sqrt{T}} \right) dx, \end{aligned}$$

e quindi:

$$(4.5) \quad \frac{\varphi(\xi + \Delta\xi) - \varphi(\xi)}{\Delta\xi} =$$

$$= \frac{\sqrt{T} \int_{-\infty}^{\xi + \Delta\xi} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{\xi + \Delta\xi - x}{2\sqrt{T}} \right) dx - \int_{-\infty}^{\xi} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{\xi - x}{2\sqrt{T}} \right) dx}{\Delta\xi} +$$

$$+ \frac{\sqrt{T} \int_{\xi + \Delta\xi}^{\infty} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{x - \xi - \Delta\xi}{2\sqrt{T}} \right) dx - \int_{\xi}^{\infty} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{x - \xi}{2\sqrt{T}} \right) dx}{\Delta\xi}.$$

Il primo termine del secondo membro della (4.5) può scriversi:

$$\sqrt{T} \int_{-\infty}^{\xi + \Delta\xi} f(x) \frac{\operatorname{ierfc} \left( \frac{\xi + \Delta\xi - x}{2\sqrt{T}} \right) - \operatorname{ierfc} \left( \frac{\xi - x}{2\sqrt{T}} \right)}{\Delta\xi} dx +$$

$$+ \sqrt{T} \frac{\int_{\xi}^{\xi + \Delta\xi} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{\xi - x}{2\sqrt{T}} \right) dx}{\Delta\xi},$$

mentre il secondo termine può scriversi:

$$\sqrt{T} \int_{\xi + \Delta\xi}^{\infty} f(x) \frac{\operatorname{ierf} \left( \frac{x - \xi - \Delta\xi}{2\sqrt{T}} \right) - \operatorname{ierfc} \left( \frac{x - \xi}{2\sqrt{T}} \right)}{\Delta\xi} dx -$$

$$- \sqrt{T} \frac{\int_{\xi}^{\xi + \Delta\xi} f(x) \operatorname{ierfc} \left( \frac{x - \xi}{2\sqrt{T}} \right) dx}{\Delta\xi}$$

di modo che la (4.5) diventa:

$$(4.6) \quad \frac{\varphi(\xi + \Delta\xi) - \varphi(\xi)}{\Delta\xi} =$$

$$\begin{aligned}
 &= \sqrt{T} \int_{-\infty}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \frac{\operatorname{ierfc}\left(\frac{\xi+\Delta\xi-x}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi} dx + \\
 &+ \sqrt{T} \int_{\xi+\Delta\xi}^{\infty} f(x) \frac{\operatorname{ierfc}\left(\frac{x-\xi-\Delta\xi}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi} dx + \\
 &+ \sqrt{T} \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \frac{\operatorname{ierfc}\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi} dx.
 \end{aligned}$$

Ma è, ricordando le (1.10):

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \frac{\operatorname{ierfc}\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi/2\sqrt{T}} dx \right| \leq \\
 &\leq \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} |f(x)| \frac{\left| \operatorname{ierfc}\left(\frac{\Delta\xi}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(-\frac{\Delta\xi}{2\sqrt{T}}\right) \right|}{\Delta\xi/2\sqrt{T}} dx \right|.
 \end{aligned}$$

Quindi, poichè esiste finito (cfr. le (1.10)):

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ierfc}\left(\frac{\Delta\xi}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(-\frac{\Delta\xi}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi/2\sqrt{T}},$$

scelto  $h$  positivo arbitrario esiste una costante positiva  $C$  tale che qualunque sia  $|\Delta\xi| \leq h$  si ha (ricordando anche la limitazione di Bunikowsky-Schwarz e che  $f(x) \in L^2$ ):

$$\begin{aligned}
 &\left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \frac{\operatorname{ierfc}\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{ierfc}\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi/2\sqrt{T}} dx \right| \leq C \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} |f(x)| dx \right| \leq \\
 &\leq C \sqrt{|\Delta\xi|} \left[ \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} \{f(x)\}^2 dx \right| \right]^{\frac{1}{2}} \leq C \sqrt{|\Delta\xi|} \|f\|.
 \end{aligned}$$

Da qui segue che l'ultimo termine del secondo membro della (4.6) tende a 0 per  $\Delta\xi \rightarrow 0$ . Perciò, passando nella (4.6) al limite per  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , tenuto conto che le integral-funzioni di una funzione sommabile sono assolutamente continue e ricordando le (1.10), segue la (4.4).

Dalla (4.4), facendo il rapporto incrementale

$$\frac{\varphi'(\xi + \Delta\xi) - \varphi'(\xi)}{\Delta\xi}$$

e passando al limite per  $\Delta\xi \rightarrow 0$  si ottiene poi:

$$(4.7) \quad \varphi''(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4T}\right) dx - f(\xi)$$

per quasi ogni  $\xi \in (-\infty, \infty)$ .

Infatti dalla (4.4) otteniamo facilmente:

$$(4.8) \quad \begin{aligned} & \frac{\varphi'(\xi + \Delta\xi) - \varphi'(\xi)}{\Delta\xi} = \\ & = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi + \Delta\xi - x}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi - x}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi} dx + \\ & + \frac{1}{2} \int_{\xi+\Delta\xi}^{\infty} f(x) \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{x - \xi - \Delta\xi}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{T}}\right)}{\Delta\xi} dx - \\ & - \frac{1}{2} \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi - x}{2\sqrt{T}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{T}}\right) \right\} dx}{\Delta\xi}. \end{aligned}$$

Con semplici passaggi, ricordando anche le (1.10), si ha:

$$(4.9) \quad \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \frac{\operatorname{erfc}\left(\frac{\xi - x}{2\sqrt{T}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x - \xi}{2\sqrt{T}}\right)}{2\Delta\xi} dx - \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} \frac{f(x)}{\Delta\xi} dx \right| <$$

$$< \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} |f(x)| \frac{\operatorname{erfc}\left(-\frac{|\Delta\xi|}{2\sqrt{T}}\right) - 1}{|\Delta\xi|} dx \right|.$$

Quindi, poichè esiste finito (cfr. le (1.10)):

$$\lim_{|\Delta\xi| \rightarrow 0} \frac{\operatorname{erfc}\left(-\frac{|\Delta\xi|}{2\sqrt{T}}\right) - 1}{|\Delta\xi|} = \frac{1}{2\sqrt{T}} \lim_{|\Delta\xi| \rightarrow 0} \frac{\operatorname{erfc}\left(-\frac{|\Delta\xi|}{2\sqrt{T}}\right) - \operatorname{erfc}(0)}{|\Delta\xi|/2\sqrt{T}},$$

il primo membro della (4.9) è limitato da una espressione del tipo:

$$C \left| \int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} |f(x)| dx \right|$$

essendo  $C$  una costante positiva indipendente da  $\Delta\xi$ . Perciò, ragionando come abbiamo fatto per dimostrare che l'ultimo termine della (4.6) tende a 0 per  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , si ha:

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) \left\{ \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi-x}{2\sqrt{T}}\right) + \operatorname{erfc}\left(\frac{x-\xi}{2\sqrt{T}}\right) \right\} dx}{\Delta\xi} = \lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) dx}{\Delta\xi},$$

ove il limite a secondo membro esista. D'altra parte, essendo  $f(x) \in L^2$ ,  $f(x)$  è sommabile in qualunque tratto finito e perciò

l'integral funzione  $\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) dx$ , con  $\gamma$  numero finito qualunque, è derivabile rispetto a  $\xi$  quasi-ovunque e tale derivata vale  $f(\xi)$  (cfr. [2], vol. I, cap. V, th. 12, pag. 163). Si ha perciò:

$$\lim_{\Delta\xi \rightarrow 0} \frac{\int_{\xi}^{\xi+\Delta\xi} f(x) dx}{\Delta\xi} = f(\xi)$$

per quasi-ogni  $\xi \in (-\infty, \infty)$ , quindi quando  $\Delta\xi \rightarrow 0$  l'ultimo

termine del secondo membro della (4.8) tende ad  $f(\xi)$  quasi-ovunque. Perciò, passando nella (4.8) al limite per  $\Delta\xi \rightarrow 0$ , ragionando come per il passaggio al limite nella (4.6), ricordando ancora le (1.10), segue la (4.7). Dalla (4.7), ricordando che  $\varphi''(\xi) = 0$ ,  $\xi \in (-\infty, \infty)$ , si ha infine:

$$(4.10) \quad f(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi T}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x) \exp\left(-\frac{(x-\xi)^2}{4T}\right) dx,$$

per quasi-ogni  $\xi \in (-\infty, \infty)$ . Ma tale equazione integrale, alla quale deve soddisfare la funzione  $f(x) \in L^2$ , ammette in  $L^2$  una ed una sola soluzione (cfr. [6], cap. XI, § 11.1, th. 145 e § 11.2, pagg. 303-305) e da qui, e dalla omogeneità della (4.10), segue il teorema.

Osserviamo, per inciso, che fuori di  $L^2$  la (4.10) ammette altre soluzioni ad esempio la soluzione  $f(x) = \text{cost.} \neq 0$ , ma ciò che qui importa è che l'unica soluzione di  $L^2$  della (4.10) è la funzione nulla.

**DIMOSTRAZIONE DEL TEOREMA 4.** Supponiamo che i valori  $\xi_n \in I$  siano tra loro distinti. Sia cioè  $\xi_n \neq \xi_s$ , per  $r \neq s$  e siano

$$f_{n_i}(x), \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$N$  funzioni distinte dalla successione (2.1) in corrispondenza ai valori  $\xi_{n_i}$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$  dell'insieme  $I$ . Supponiamo per assurdo, che tali funzioni siano tra loro linearmente dipendenti in  $(-\infty, \infty)$ . In questa ipotesi, posto:

$$y = \frac{x}{2\sqrt{T}}, \quad y_i = \frac{\xi_{n_i}}{2\sqrt{T}}, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

esisteranno  $N$  costanti  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , non tutte nulle tali che:

$$(4.11) \quad \sum_{i=1}^{1\dots N} c_i \text{ierfc}(|y - y_i|) = 0$$

qualunque sia  $y \in (-\infty, \infty)$  (cfr. [2], vol. II, cap. I, § 2, pag. 2).

Dalla (4.11), ricordando le (1.10), si ha, derivando due volte rispetto ad  $y$ :

$$(4.12)_1 \quad \sum_i^{1\dots N} c_i \exp(-(y - y_i)^2) = 0, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

Da questa, derivando ancora rispetto ad  $y$ , segue:

$$(4.12)_2 \quad \sum_i^{1\dots N} c_i (y - y_i) \exp(-(y - y_i)^2) = 0, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

Da qui, ancora per derivazione, si ha:

$$\sum_i^{1\dots N} c_i \exp(-(y - y_i)^2) - 2 \sum_i^{1\dots N} c_i (y - y_i)^2 \exp(-(y - y_i)^2) = 0,$$

e perciò, ricordando la (4.12)<sub>1</sub>, abbiamo:

$$(4.12)_2 \quad \sum_i^{1\dots N} c_i (y - y_i)^2 \exp(-(y - y_i)^2) = 0, \quad y \in (-\infty, \infty).$$

Così proseguendo si giunge al sistema:

$$\sum_i^{1\dots N} c_i (y - y_i)^j \exp(-(y - y_i)^2) = 0, \quad y \in (-\infty, \infty),$$

$$j = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Poichè le  $c_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , non sono tutte nulle il determinante dei coefficienti delle  $c_i$  dovrà essere nullo essendo il sistema omogeneo.

Dovremo cioè avere:

$$\text{Det}((y - y_i)^j \exp(-(y - y_i)^2)) = 0,$$

$$i = 1, 2, \dots, N, \quad j = 0, 1, 2, \dots, N - 1.$$

Ma è:

$$\text{Det}((y - y_i)^j \exp(-(y - y_i)^2)) =$$

$$= \exp(-\sum_i^{1\dots N} (y - y_i)^2) \text{Det}((y - y_i)^j).$$

Ora, poichè si ha, per ipotesi,  $\xi_{n_r} \neq \xi_{n_s}$ , è  $y_r \neq y_s$  per  $r \neq s$ , ed avremo:

$$\text{Det } ((y - y_i)^i) \neq 0,$$

(cfr. [7], vol. I, cap. I, § 20, pagg. 24-25), e perciò siamo caduti in assurdo. Poichè l'assurdo proviene dall'aver supposto che le  $N$  funzioni  $f_{n_i}(x)$  siano tra loro linearmente dipendenti segue il teorema.

#### BIBLIOGRAFIA

- [1] H. S. CARSLAW and J. C. JAEGER: *Conduction of heat in solids*. 2<sup>a</sup> ed., Oxford, 1959.
- [2] G. VITALI e G. SANSONE: *Moderna teoria delle funzioni di variabile reale*. Voll. 2, 3<sup>a</sup> ed., Bologna, 1951-52.
- [3] M. PICONE e T. VIOLA: *Lezioni sulla moderna teoria dell'integrazione*. Torino, 1952.
- [4] E. W. HOBSON: *The theory of function of a real variable and the theory of Fourier's series*. Voll. 2, 2<sup>a</sup> ed., Cambridge, 1926.
- [5] G. SANSONE: *Sul teorema di Parseval in intervalli infiniti*. Sta in Ann. Sc. Norm. Sup. di Pisa (2), IV (1935), pagg. 35-41.
- [6] E. C. TITCHMARSH: *Introduction to the theory of Fourier integrals*. Oxford, 1937.
- [7] G. SANSONE e R. CONTI: *Lezioni di Analisi Matematica*. Voll. 2, 11<sup>a</sup> ed., Padova, 1958-59.

Manoscritto pervenuto in redazione il 27 marzo 1965.